

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Динамика кольца нелокально связанных отображений Эно-Лози
при наличии внешнего шумового воздействия**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4061 группы

направления 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы
связи»

Института физики

Аверьянова Владислава Михайловича

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент

Стрелкова Г.И.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., доцент

Стрелкова Г.И.

Саратов, 2024

ВВЕДЕНИЕ

Большое разнообразие динамических систем и их режимов обусловлено нелинейностью подсистем, неоднородностью параметров и связей, а также внешними воздействиями, часто шумовыми. Шум и неоднородности могут оказывать как деструктивное, так и конструктивное воздействие. Ранее использовались источники гауссова шума, описывающие многие помехи, такие как тепловой шум. Однако современные исследования показали, что реальный шум может иметь распределение с тяжелым хвостом, вызывающим импульсы большой амплитуды. Шум Леви моделирует такие процессы, проявляя импульсы высокой амплитуды, и может сводиться к гауссовскому шуму и шуму Коши. Он используется для моделирования процессов в телекоммуникационных и инженерных системах, оптоэлектронных устройствах, нейронных сетях, сердечных ритмах, финансовых и социальных системах, а также в реакции лесов на засуху и пожары, производстве мРНК и белков и т.д.

Динамические системы и сети могут демонстрировать сложную динамику из-за внутреннего и внешнего шума, а также нелинейности элементов. Это приводит к различным пространственно-временным режимам, от некогерентных до синхронизированных состояний. В последнее десятилетие возрос интерес к новым режимам частичной синхронизации, таким как химерные и уединенные состояния. Химерные состояния характеризуются сосуществованием когерентных и некогерентных кластеров. Уединенные состояния возникают, когда одиночные узлы сосуществуют с когерентными группами. Эти режимы наблюдаются как в численных моделях, так и в реальных системах.

Шум может играть как конструктивную, так и деструктивную роль в формировании частичной синхронизации. Он может вызывать новые типы химерных состояний, например, когерентно-резонансные химеры или химеры самоиндуцированного стохастического резонанса. Некоторые химеры являются переходными и имеют конечное время жизни, которое может изменяться под воздействием шума. Аддитивный и мультипликативный шум может повысить вероятность наблюдения химерных состояний (эффект «химерного резонанса»). В сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо аддитивный шум способен подавить все режимы, кроме химерных. В нейронной сети Хиндмарша-

Роуза шум Леви может вызвать или подавить состояние химеры. Введение шума снижает вероятность появления одиночных состояний и количество одиночных узлов, приводя к переходу от уединенных состояний к пятнистой синхронизации. Однако влияние шума Леви на химеры и уединенные состояния изучено недостаточно.

С помощью численного моделирования мы исследуем сеть нелокально связанных отображений Эно-Лози, чтобы изучить влияние шума Леви на химеры и уединенные состояния. Отображение Эно-Лози сочетает в себе динамические свойства обоих отображений. Мы используем определение, предложенное М.А. Азиз-Алауи, К. Робертом и К. Гребогги. Сеть отображений Эно-Лози может проявлять химеры и уединенные состояния. Мы исследуем эти режимы при изменении параметра локальной динамики и силы связи между узлами, анализируем влияние шума Леви и сравниваем результаты с данными для сетей отображений Эно и Лози в присутствии гауссовского шума.

Целью данной выпускной квалификационной работы было изучить сходства и различия характеристик перехода «когерентность–некогерентность» в ансамбле нелокально связанных хаотических осцилляторов с негиперболическими и гиперболическими аттракторами.

Для достижения целей были поставлены следующие **задачи**:

1. Изучить мгновенные профили колец при различных типах парциальных элементов и различной силе связи между элементами;
2. Проанализировать влияние слагаемого связи в ансамблях;
3. Сравнить полученные результаты.

Для выполнения поставленных задач применялось компьютерное моделирование, которое включало в себя написание программного кода на языке программирования C, и визуализацию полученных данных с помощью программы Gnuplot.

Основная часть

Численно исследована динамика сети связанных дискретных систем как без, так и в присутствии некоррелированных источников шума Леви. Исследуемая сеть описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_i(n+1) &= F(x_i(n), y_i(n)) + \\ &+ \frac{c}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [F(x_j(n), y_j(n)) - F(x_i(n), y_i(n))], \\ y_i(n+1) &= G(x_i(n), y_i(n)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_i(n)$ и $y_i(n)$ — динамические переменные, $i = 1, 2, \dots, N$ — номер элемента в сети, $N = 1000$ — общее количество элементов в сети, n — дискретное время. Функции $F(x_i(n), y_i(n))$ и $G(x_i(n), y_i(n))$ определяют локальную динамику отдельного элемента сети и задаются правыми частями отображения Эно–Лози, которое будет описано в разделе 2.2. Связь между элементами нелокальна и определяется вторым членом первого уравнения системы (1). Нелокальное взаимодействие контролируется двумя параметрами: силой связи c и дальностью связи R . Последний задает количество ближайших соседей, с которыми связан i -й элемент справа и слева, причем $1 < R < N/2$.

В качестве отдельного элемента исследуемой сети (1) используется отображение Эно–Лози. Отображение Эно ($x(n+1) = 1 - \alpha^{Henon} x^2(n) + y(n)$, $y(n+1) = \beta^{Henon} x(n)$) и отображение Лози ($x(n+1) = 1 - \alpha^{Lozi} |x(n)| + y(n)$, $y(n+1) = \beta^{Lozi} x(n)$) представляют собой классические примеры систем с дискретным временем, которые демонстрируют негиперболические и квазигиперболические хаотические аттракторы соответственно.

В работе была представлена гладкая версия кусочно-линейного отображения Лози, которая разделяет многие качественные особенности как отображения Лози, так и отображения Эно. Отображение Эно–Лози описывается

следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 1 - \alpha^{HL} S_\varepsilon(x(n)) + y(n), \\ y(n+1) &= \beta^{HL} x(n), \\ S_\varepsilon(x) &= \begin{cases} |x|, & \text{if } |x| \geq \varepsilon, \\ x^2/2\varepsilon + \varepsilon/2, & \text{if } |x| \leq \varepsilon, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где x и y — динамические переменные, n — дискретное время (номер итерации), $\alpha^{HL} \in \mathbb{R}$, $\beta^{HL} \neq 0 \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon < 1$ — управляющие параметры. Видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ отображение Эно–Лози сводится к отображению Лози. Фиксирование α^{HL} и β^{HL} и увеличение ε позволяет изменить гладкость аттракторов, т.е. перейти от Лози-подобного аттрактора в Эно-подобный. Заметим, что хаотический аттрактор в отображении Эно–Лози является гладким даже при очень малом значении ε .

Теперь перейдем к численному исследованию динамики сети нелокально связанных отображений Эно–Лози (1). Прежде чем исследовать влияние шума Леви, мы выясним, какие пространственно-временные структуры типичны для свободной от шума сети отображений Эно–Лози и как их наблюдение зависит от параметров системы. Мы изменяем параметр локальной динамики α^{HL} и силу связи c , а остальные параметры фиксируем следующим образом: $\varepsilon = 0.1$, $\beta^{HL} = 0.5$, $R = 320$. Значение $\varepsilon = 0.1$ выбрано таким образом, чтобы, с одной стороны, отдельные элементы показывали динамику, уже совершенно отличную от динамики отображения Лози, но, с другой стороны, хаотический аттрактор отображения Эно–Лози не имеет четко выраженной округлой формы. Значение $R = 320$ можно рассматривать как классическое как для сети отображений Эно, так и для сети отображений Лози, поскольку оно обеспечивает наблюдение химерных и уединенных состояний соответственно.

Как видно из диаграммы на рис. 1, в сети Эно–Лози можно выделить два разных сценария перехода от некогерентности (НЕКОГ) к синхронизации (СИНХР) по мере увеличения силы связи c . Первый реализуется через появление уединенных состояний (УС) при $1.4 < \alpha^{HL} < 1.59$. Такой переход характерен для сети отображений Лози. Одиночные узлы могут сосуществовать вместе либо с десинхронизированными элементами или с син-

хронными элементами при $0.01 < c < 0.13$. Мы назвали эти структуры «некогерентными» из-за большого количества одиночных узлов (НЕКОГ и НЕКОГ(УС)), но НЕКОГ(УС) является предвестником уединенных состояний, а не НЕКОГ. Уединенные состояния также могут наблюдаться только при $0.13 < c < 0.28$ (УС(период) и УС(хаос)). Число одиночных узлов постепенно и линейно уменьшается с ростом c . Второй сценарий перехода к синхронизации в сети отображений Эно–Лози происходит при $\alpha^{HL} > 1.6$ (рис. 1) и проявляется в появлении химерных состояний (ХС). Этот переход типичен для сети отображений Эно.

Если рассмотреть переход от синхронизации к некогерентности при уменьшении силы связи c и при $\alpha^{HL} > 1.6$ (рис. 1, СИНХР $\rightarrow$ НЕКОГ), то динамика сети отображений Эно – Лози характеризуется мгновенными профилями с разрывами (РАЗРЫВ), которые являются предвестниками по-

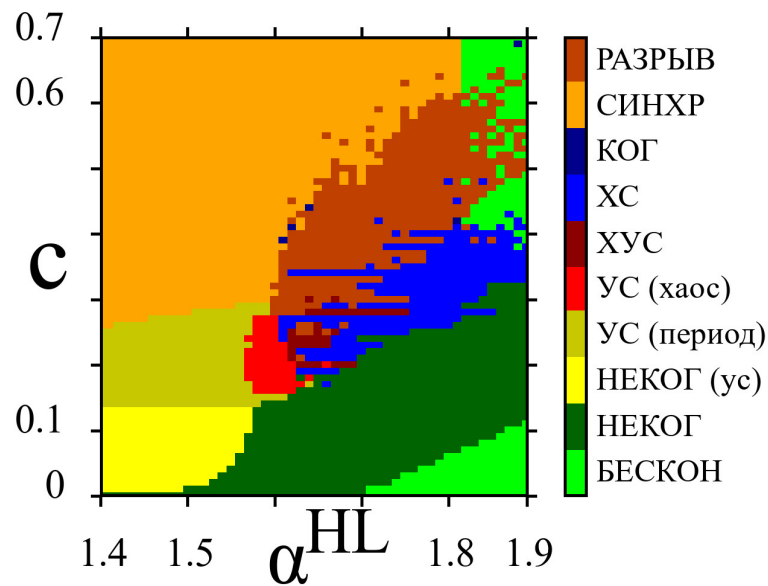


Рисунок 1 — Схема пространственно-временных структур в свободной от шумов сети нелокально связанных отображений Эно–Лози (1) на плоскости параметров (α^{HL}, c) . Обозначения: БЕСКОН – траектории уходят на бесконечность; НЕКОГ – некогерентность; НЕКОГ(УС) – режим некогерентности с большим количеством одиночных узлов; УС(период) – уединенное состояние с периодической динамикой; УС(хаос) – уединенное состояние с непериодической динамикой; ХУС – химера уединенных состояний; ХС – химерные состояния; КОГ – когерентное состояние; СИНХР – синхронизация в пространстве и непериодичность во времени; и РАЗРЫВ – профиль с разрывами. Остальные параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\beta^{HL} = 0.5$, $R = 320$, $N = 1000$.

явления фазовых химерных состояний (ХС). Элементы сети могут колебаться как периодически, так и непериодически во времени. Дальнейшее уменьшение c приводит к наблюдению фазовых химерных состояний. Как и в случае с одиночными состояниями, пространственное распределение значений коэффициентов взаимной корреляции позволяет выявить химерные состояния даже в зашумленной сети.

Так же численно исследована динамика сети связанных дискретных систем как без, так и в присутствии некоррелированных источников шума Леви. В систему (1) добавили последний член в первом уравнении $\eta_i^{\alpha^L, \beta^L}(\sigma^L, n)$, который представляет собой внешнее аддитивное влияние в виде шума Леви. Параметры α^L , β^L , σ^L характеризуют плотность распределения значений источников шума. Параметр α^L — это показатель устойчивости, изменяющийся в интервале $[0, 2]$. При $\alpha^L = 2$ распределение значений источников шума соответствует гауссовскому, а при $\alpha^L = 1$ — распределению Коши. С уменьшением α^L увеличивается количество высоких значений источника шума и их амплитуда. Параметры β^L и σ^L определяют симметрию и масштаб распределения соответственно. Интенсивность шума задается следующим образом: $A = (\sigma^L)^{\alpha^L}$. В нашем численном моделировании для моделирования источников шума Леви используется алгоритм Яницки-Верона.

В этой работе исследуем, как аддитивный шум Леви влияет на уединенные состояния в сети нелокально связанных отображений Эно–Лози (1). Для этого выберем параметр локальной динамики $\alpha^{HL} = 1.5$, соответствующий существованию уединенных состояний в свободной от шумов сети отображений Эно–Лози при фиксированном $\varepsilon = 0.1$ и $\beta^{HL} = 0.5$ (рис. 1). Мы варьируем силу связи c и масштабный параметр распределения шума Леви σ^L и исследуем отклик уединенных состояний для нескольких значений индекса устойчивости α^L . На рисунке показаны диаграммы распределения среднего нормализованного числа одиночных узлов N_S на плоскости параметров (c, σ^L) и (c, A) , где $A = (\sigma^L)^{\alpha^L}$ — интенсивность шума.

Как следует из рис. 2(а), при $\alpha^L = 2$, что соответствует гауссовскому распределению, распределение одиночных узлов выглядит аналогично наблюдаемому для отображения Лози и осциллятора ФитцХью-Нагумо. Видно, что в сети отображений Эно–Лози одиночные узлы существуют в конечных

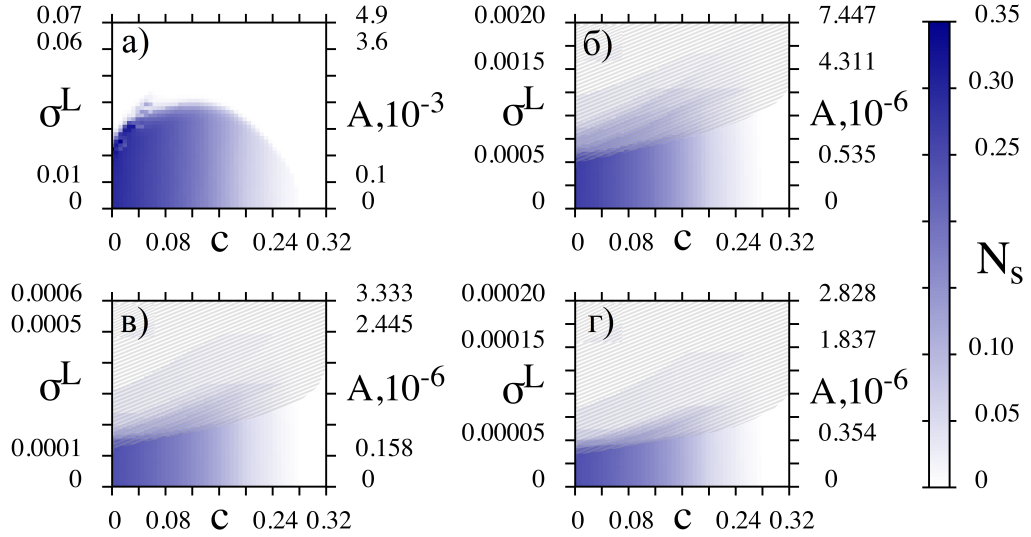


Рисунок 2 – Распределение среднего нормированного числа одиночных узлов N_s на плоскостях параметров (c, σ^L) и (c, A) для различных значений индекса устойчивости шума Леви α^L : (а) 2.0, (б) 1.9, (в) 1.7, (г) 1.5. Правая шкала показывает интенсивность шума A в нелинейном масштабе. Серая заштрихованная область соответствует параметрам, при которых траектория может расходиться до бесконечности. Остальные параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\alpha^{HL} = 1.5$, $\beta^{HL} = 0.5$, $R = 320$, $N = 1000$

диапазонах как силы связи $c \in [0, 0.28]$, так и масштабного параметра генератора шума $\sigma^L \in [0, 0.041]$. Заметим, что наибольшее количество уединенных узлов наблюдается при слабой связи $c \in [0, 0.12]$ и шумовом параметре $\sigma^L \in [0, 0.035]$. Кроме того, существует максимальный диапазон масштабного параметра σ^L (а также интенсивности A) при определенном значении $c \approx 0.12$, когда все еще наблюдается большое количество уединенных узлов. Таким образом, гауссовский белый шум определенной интенсивности может поддерживать одиночные узлы, когда сила связи c изменяется в пределах некоторого конечного интервала. При дальнейшем увеличении c , $c > 0.12$, число одиночных узлов постепенно уменьшается и исчезает при $c \approx 0.28$. Таким образом, при увеличении силы связи ($c \rightarrow 0.28$) даже слабый шум может подавить уединенные узлы в сети отображения Эно–Лози.

Теперь мы будем варьировать индекс устойчивости шума Леви α^L и анализировать реакцию уединенных состояний в сети отображений Эно–Лози на влияние шума. Соответствующие диаграммы распределения N_s представлены на рис. 2(б)-(г) для трёх убывающих значений α^L . Как следует из рас-

пределений, увеличение количества импульсов высокой амплитуды (уменьшение α^L) приводит к подавлению уединенных узлов в исследуемой сети при меньших значениях шумовых параметров σ^L и A по сравнению со случаем распределения Гаусса (рис. 2(а)). Более того, число одиночных узлов резко уменьшается при $c \approx 0,24$. Как и ранее, наибольшее количество уединенных узлов наблюдается на конечных интервалах как $c \in [0, 0.12]$, так и параметров шума σ^L и A . Однако по мере уменьшения индекса устойчивости уединенные узлы существуют и при меньших значениях σ^L и A (см. рис. 2(б)-(г)).

Наши расчеты показывают, что устойчивость уединенных состояний в сети отображений Эно–Лози по отношению к шуму Леви зависит от случайных начальных распределений динамических переменных. Этот факт хорошо иллюстрируется диаграммами на рис. 2(б)-(г), где распределения среднего нормированного числа уединенных узлов N_S на плоскостях параметров имеют слоистую структуру. Каждый "слой" соответствует одной случайной реализации начальных условий. В нашем численном моделировании использовалось 10 случайных начальных реализаций. Очевидно, что некоторые начальные реализации могут обеспечить существование одиночных узлов в сети даже при относительно больших значениях параметров шума Леви σ^L и A . Однако по мере уменьшения индекса устойчивости α^L всё меньше и меньше начальных распределений могут приводить к наблюдению уединенных состояний даже при малых интенсивностях шума.

Изменения формы области существования уединенных состояний и числа уединенных узлов в рассматриваемом диапазоне параметров качественно повторяют картину, наблюдаемую и описанную выше. Поэтому мы сосредоточимся на эволюции вероятности существования состояния химеры при изменении параметров шума. Подобно нашим предыдущим результатам, вероятность наблюдения химерных состояний в зашумленной сети отображений Эно–Лози также демонстрирует резонансоподобную зависимость («химерный резонанс») от интенсивности шума (рис. 3, красная (P) цветовая шкала). Это означает, что существует некоторая оптимальная интенсивность шума σ^L , соответствующая наибольшей вероятности существования химерных состояний и наиболее широкому диапазону силы связи c , в пределах которого химерные состояния наблюдаются с максимальной вероятностью. При $\sigma^L \rightarrow 0$ в сети

отображений Эно–Лози при выбранных значениях параметров нет химерных состояний. В случае гауссовского распределения (рис.3(а)) даже очень низкая интенсивность шума способна индуцировать химерные состояния с вероятностью почти 100% в довольно широком конечном диапазоне силы связи c . Этот диапазон связи остается практически неизменным до $\sigma^L \approx 0,018$ ((Рис.3(а)). Распределения, построенные на рис. 3(б)-(г) указывают на то, что уровень шума, соответствующий наиболее широкому диапазону силы связи c , в котором с максимальной вероятностью наблюдаются химерные состояния, сильно зависит от индекса устойчивости α^L и существенно уменьшается при α^L . Например, $\sigma_{\text{opt}}^L \approx 0.01$ для гауссовского распределения $\alpha^L = 2.0$, $\sigma_{\text{opt}}^L \approx 0.0006$ для $\alpha^L = 1.8$, $\sigma_{\text{opt}}^L \approx 0.0003$ для $\alpha^L = 1.7$ и $\sigma_{\text{opt}}^L \approx 0.00009$ за $\alpha^L = 1,5$.

Как мы уже отмечали, химерный резонанс наблюдается и в случае шума Леви при $\alpha^L < 2.0$, как видно на рис. 3(б)-(г). Однако, что касается области уединенных состояний, увеличение интенсивности шума Леви (начиная с достаточно малых значений) приводит к расхождению траектории к бесконечности и, таким образом, значительно уменьшает область существования химерного состояния по параметру σ^L (Рис. 3(б)-(г)). Однако, в отличие от

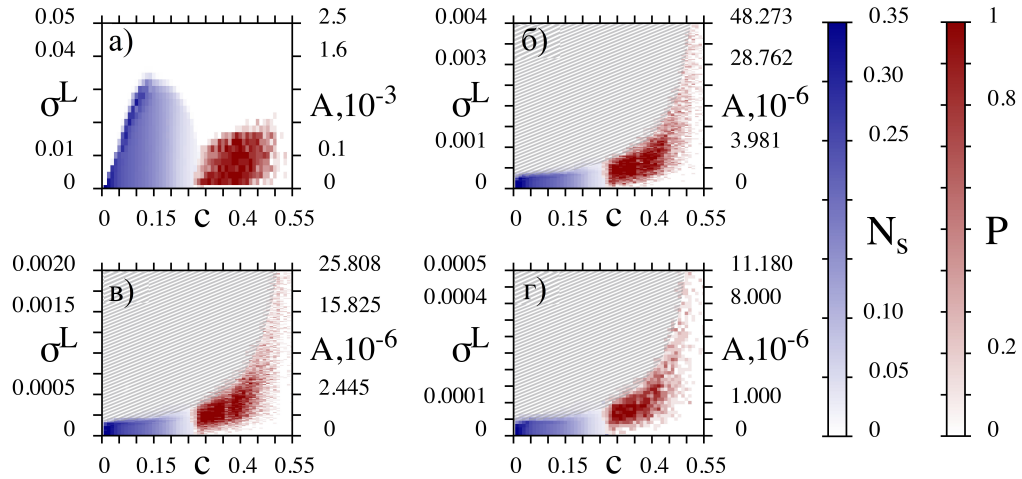


Рисунок 3 — Распределение среднего нормированного числа уединенных узлов (шкала N_S) и вероятность существования химерных состояний (шкала P) на плоскости (c, σ^L) и (c, A) для различных значений индекса стабильности шума Леви α^L : (а) 2.0, (б) 1.8, (в) 1.7 и (г) 1.5. Заштрихованная серым область соответствует параметрам, при которых система может уходить на бесконечности. Остальные параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\alpha^{HL} = 1.6$, $\beta^{HL} = 0.5$, $R = 320$, $N = 1000$.

гауссовского распределения, химерные состояния все же можно наблюдать в сети отображений Эно–Лози с высокой, а иногда и максимальной вероятностью при наличии шума Леви достаточно большой интенсивности σ^L . Эта область имеет вид "хвоста примыкающего к основной области существования состояния химеры, и расположена в области сильной связи $0.45 < c < 0.55$ (рис. 3(б)-(г)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы смоделировали и исследовали численно пространственно-временную динамику сети нелокально связанных отображений Эно–Лози без и в присутствии шума Леви. Изолированное отображение Эно–Лози сочетает в себе особенности отображения Лози (бифуркация границ-столкновений) и отображения Эно (переход к хаосу через бифуркации удвоения периода).

Наши исследования показали, что благодаря этой особенности в сети нелокально связанных отображений Эно–Лози можно выделить два сценария перехода некогерентность-когерентность в зависимости от параметра локальной динамики и силы связи. Каждый из этих сценариев связан с формированием особых паттернов частичной синхронизации, таких как уединенные состояния и химерные состояния. Этот факт позволил нам изучить эволюцию этих структур и их устойчивость к шумовым возмущениям, рассматривая только одну сеть связанных систем с дискретным временем.

Первый сценарий связан с появлением уединенных состояний, когда параметр локальной динамики соответствует периодическому поведению в отдельных узлах и при уменьшении силы связи. Как было показано ранее, этот переход реализуется в сети отображений Лози. Вторым сценарием, который также имеет место в сети Эно–Лози, типичен для сети отображения Эно, где переход некогерентность-когерентность сопровождается образованием химерных состояний. В этом случае параметр локальной динамики соответствует хаотической динамике в одиночном отображении Эно–Лози.

Мы обнаружили, что аддитивный шум Леви может поддерживать уединенные состояния в сети отображений Эно–Лози в определенных конечных диапазонах силы связи c и параметра σ^L , когда наибольшее число уединенных

узлов существует. Однако эти диапазоны существенно сужаются и смещаются в сторону меньших значений s и σ^L при уменьшении индекса устойчивости α^L . При увеличении силы связи и интенсивности шума число уединенных узлов либо постепенно (в случае гауссовского распределения), либо резко (при наличии импульсов большой амплитуды) уменьшается и исчезает.

Влияние аддитивного шума Леви на химерные состояния в сети отображений Эно–Лози проявляется в химерном резонансе, обнаруженном впервые для сети отображений Эно. Введение шума Леви может сначала возбудить химерные состояния, а затем увеличить вероятность их существования до максимального (100%) значения. Этот эффект наблюдается и сохраняется в самом широком диапазоне силы связи s при некоторой оптимальной интенсивности шума, которая существенно снижается с увеличением числа импульсов большой амплитуды, т.е. с уменьшением показателя устойчивости α^L .

Мы полагаем, что полученные результаты по влиянию аддитивного шума Леви на химерные и уединенные состояния могут способствовать более глубокому пониманию роли шума, моделирующего реальные возмущения, в появлении и эволюции своеобразных паттернов частичной синхронизации.

Результаты проведенных исследований были представлены в следующей статье:

Rybalova E., Averyanov V., Strelkova G, Lozi R. *Peculiarities of the spatio-temporal dynamics of a Hénon–Lozi map network in the presence of Lévy noise* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2024. – V. 184. – P. 115051.