

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Пространственно-временная динамика ансамблей нелокально связанных  
хаотических отображений под воздействием аддитивного шума**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 2232 группы  
направления 03.04.03 Радиофизика  
Института физики  
Нечаева Василия Андреевича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_ Г.И. Стрелкова

Саратов 2024 г.

## Введение

Слово «шум» обычно ассоциируется с термином «помеха». Традиционно считалось, что наличие шума может только ухудшить или даже разрушить работу системы. Изучение шумовой динамики чрезвычайно важно для понимания процессов, происходящих в реальных системах, и имеет существенное практическое значение для технологических, инфраструктурных и коммуникационных сетей, биологических, эпидемиологических, климатических и социальных процессов, а также в нейродинамике и медицине.

Источники шума в сложных динамических системах способны приводить к установлению новых режимов. Этот эффект был назван индуцированным шумовым переходом. Различные исследования показали, что шум может повысить степень синхронизации или согласованности в системе или вызвать улучшение ее производительности. Это может привести к формированию более регулярных временных и пространственных структур, эффектами индуцированной и усиленной шумом синхронизации различных сложных пространственно-временных структур в сетях, вызывать усиление слабых сигналов, сопровождающееся ростом отношения сигнал/шум (стохастический резонанс). Численные исследования показали, что источники шума также можно использовать для стабилизации и/или эффективного управления режимами работы сложных систем и сетей.

В последнее время интерес к изучению влияния шума на поведение сложных нелинейных систем значительно возрос с открытием особых пространственно-временных структур, таких как химерные состояния и уединённые состояния. Химерное состояние представляет собой пример режима частичной синхронизации, когда пространственно локализованные области с когерентной (синхронизированной) и некогерентной (десинхронизированной) динамикой сосуществуют в сетях связанных нелинейных осцилляторов. Химеры возникают при переходе от когерентности к некогерентности. Они были изучены теоретически и численно, а также

наблюдались экспериментально. Проведенные исследования показали, что химерные структуры могут быть связаны с процессами, происходящими в головном мозге, а также связаны с различными проявлениями нервной и мозговой деятельности человека и животных.

В настоящей работе исследуется влияние аддитивного шума на химерные состояния в кольце нелокально связанных хаотических отображений. В качестве отдельных элементов используются логистическое отображение, отображение Рикера и отображение Эно.

**Целью** настоящей магистерской работы является исследование эффектов, к которым приводит добавление шума в ансамблях хаотических отображений, которые демонстрируют химерные состояния. Более того поставлена цель найти оптимальные значения интенсивности шума для всех рассматриваемых систем, которые приведут к увеличению вероятности установления химерных состояний.

Для достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Анализ собственной динамики ансамблей без воздействия шума. Нахождение параметров, соответствующих установлению в системах химерных состояний;
2. Анализ изменения режимов, возникающих в ансамблях под воздействием шума. Нахождение значений силы связи и интенсивности шума, при которых наблюдается максимальная вероятность химер;
3. Прodelать все исследования для колец логистических отображений, отображений Эно и отображений Рикера и сопоставить их.

Для выполнения поставленных задач были написаны программы на языке программирования C, а также использована программа Gnuplot для визуализации всех полученных результатов.

## Основное содержание работы

Данная выпускная квалификационная работа направлена на изучение влияния аддитивного шума на динамику кольца нелокально связанных хаотических отображений и на формирование химерных структур. Исследуемая в работе система представляет собой кольцо отображений с нелокальной связью и описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}x(i, n+1) &= F(x_i, y_i) + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [F(x_j, y_j) - F(x_i, y_i)] + D \xi_i \\ y(i, n+1) &= G(x_i, y_i)\end{aligned}\quad (1)$$

где  $x_i^t, y_i^t$  – динамические переменные,  $n$  – дискретное время,  $i = 1, 2, 3, \dots, N=1000$  – номер осциллятора,  $\sigma$  – коэффициент нелокальной связи (сила связи)  $i$ -го осциллятора с  $R$  соседями слева и справа. Функции  $F(i, n)$  и  $G(i, n)$  определены правыми частями уравнений соответствующих отображений (они будут описаны ниже). Начальные значения всех элементов случайно распределены в интервале, всего анализируется 50 различных реализаций начальных условий.  $D$  – интенсивность нормального шума (интенсивность),  $\xi$  – генератор гауссовского шума.

В качестве парциальных элементов используется три различных отображения:

Логистическое отображение:

$$x^l(n+1) = \alpha^l x^l(n)(1 - x^l(n)) \quad (2)$$

$x_n$  – динамическая переменная,  $\alpha^l$  – управляющий параметр, определяет степень хаоса в системе. На рис.1(а) приведена бифуркационная диаграмма одиночного логистического отображения, на которой отчетливо виден каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаотической динамике при  $\alpha^l \approx 3.57$ , а при  $\alpha^l > 4.0$  система уходит на бесконечность.

Отображение Эно:

$$\begin{cases} x^H(n+1) = 1 - \alpha^H (x^H(n))^2 + y^H(n) \\ y^H(n+1) = \beta^H x^H(n) \end{cases} \quad (3)$$

$x_n, y_n$  – динамические переменные,  $\alpha^H, \beta$  – управляющие параметры. Отображение Эно сводится к логистическому отображению, при  $\beta \rightarrow \infty$ . Соответствующая бифуркационная диаграмма  $x(\alpha^H)$  при фиксированном  $\beta = 0,2$  для отображения Эно представлена на рис.1(б). Начиная с  $\alpha^H \approx 1.15$  отображение демонстрирует хаотическое поведение, а при  $\alpha^H > 1.61$  траектории расходятся к бесконечности.

Модифицированное отображение Рикера:

$$x^R(n+1) = \alpha^R |x^R(n)| \exp[-x^R(n)] \quad (4)$$

Это отображение также демонстрирует переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в точке  $\alpha^R \approx 4,77$  рис.1(в).

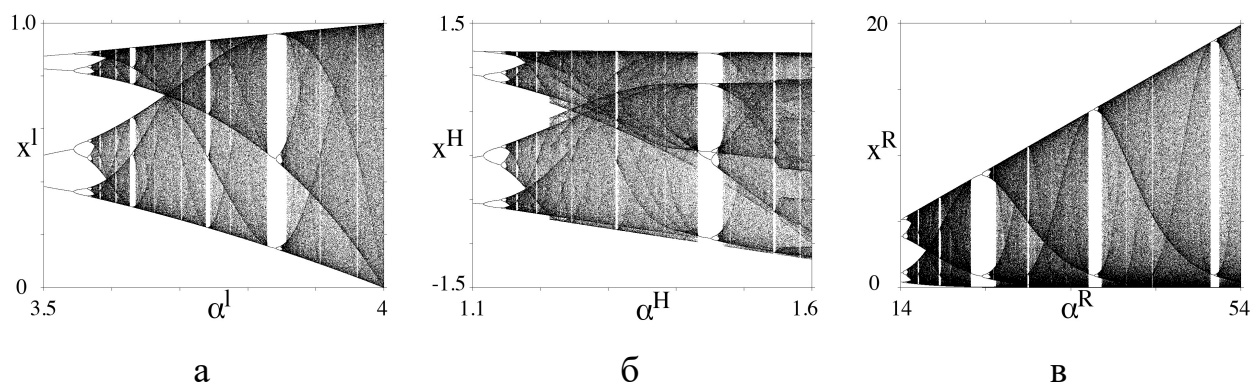


Рисунок 1: Бифуркационные диаграммы для изолированных отображений: (а) логистическое отображение, (б) отображение Эно ( $\beta = 0.2$ ), (в) модифицированное отображение Рикера

В работе сначала рассматривается динамика кольца нелокально связанных логистических отображений. Для исследования данной системы были выбраны следующие значения параметров: радиус связи  $R = 320$ , также изменялся управляющий параметр в пределах  $\alpha^l \in [3.5, 4]$  и сила связи  $\sigma \in [0.15, 0.55]$ .

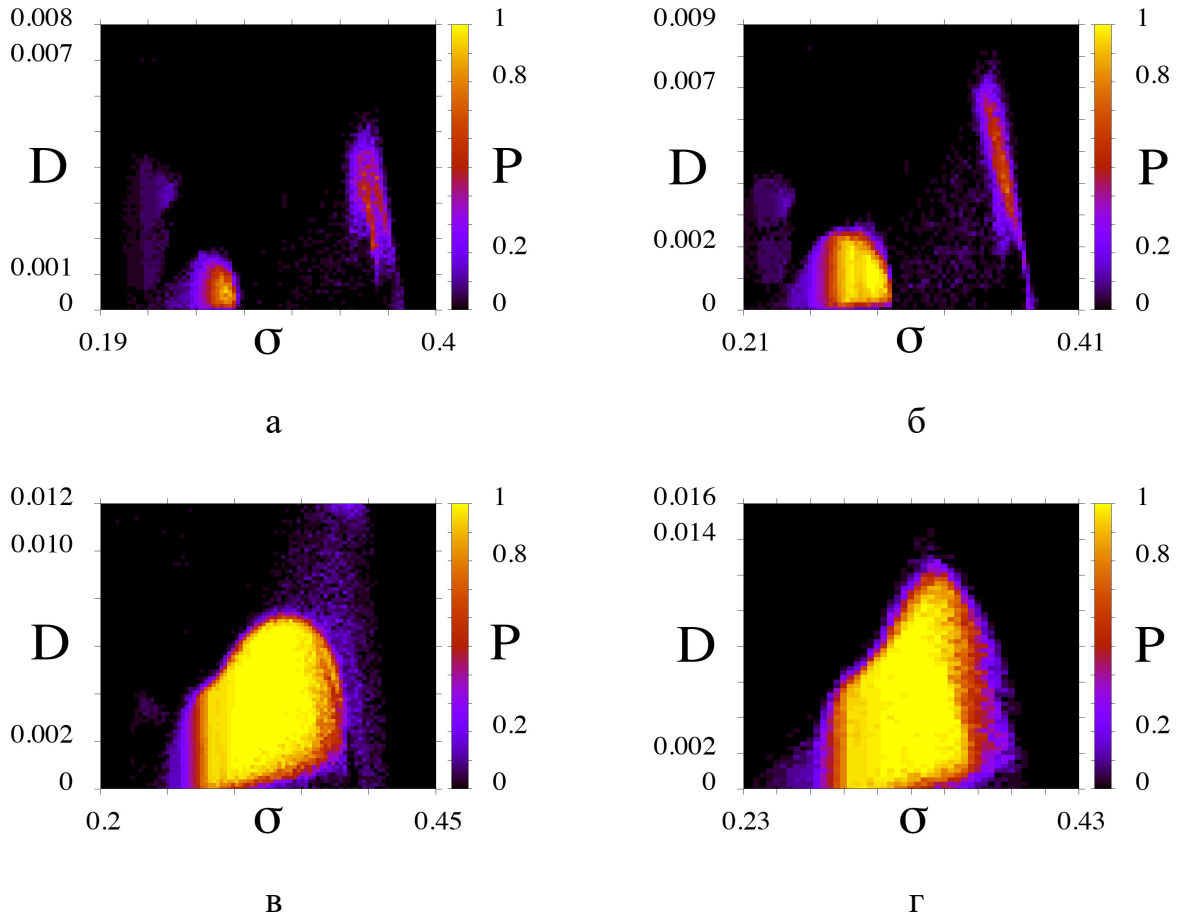


Рисунок 2: Диаграммы распределения вероятностей наблюдения химерных состояний  $P$  на плоскости параметров  $(\sigma, D)$  в кольце логистических отображений при различных значениях управляющего параметра  $\alpha^l$ : (а)  $\alpha^l = 3.69$ , (б)  $\alpha^l = 3.7$ , (в)  $\alpha^l = 3.75$  и (г)  $\alpha^l = 3.8$ . Диаграммы построены с использованием  $M = 50$  различных пар реализаций случайных начальных условий и реализаций шума. Остальные параметры:  $R=320$ ,  $N=1000$ .

Для значений  $\alpha^l$ , когда в области профилей с разрывами нет когерентного окна (рис. 2(а),(б)), распределение вероятностей наблюдения химерного состояния занимает всю область на плоскости параметров  $(\sigma, D)$ . Видно, что химеры могут наблюдаться в зашумленном кольце с ненулевой и даже максимальной вероятностью (желтая область на рис.2) в достаточно широком

интервале силы связи  $\sigma$ . Этот  $\sigma$ -интервал постепенно сужается по мере увеличения интенсивности шума, например, до  $D \approx 0.015$  для  $\alpha^l = 3.75$  (рис.2(в)) и  $D \approx 0.014$  для  $\alpha^l = 3.7$  (рис.2(г)). Кроме того, для слабого шума область с высокой вероятностью сдвигается в сторону больших значений силы связи  $\sigma$ . Интервал по интенсивности шума с максимальной вероятностью установления химер сначала постепенно расширяется, достигая самой большой ширины при определенном значении  $\sigma$ . Например, при  $\sigma \approx 0.33$  для  $\alpha^l = 3.75$  (рис. 2 (в)) и при  $\sigma \approx 0.35$  для  $\alpha^l = 3.7$  (рис.2(г)) и затем постепенно уменьшается при приближении  $\sigma$  к левой границе  $\sigma$ -интервала максимальной вероятности. Из диаграмм распределения также можно заметить (рис.2(в),(г)), что существует некоторый оптимальный уровень шума ( $D_{opt}$ ), при котором ширина  $\sigma$ -интервала, соответствующего высокой вероятности наблюдения химер ( $P > 0.95$ ), является самой большой. В наших случаях при  $D_{opt} \approx 0.0028$   $\sigma \in [0.28, 0.6]$  при  $\alpha^l = 3.75$  (рис. 2(в)) и  $D_{opt} = 0.0032$   $\sigma \in [0.29, 0.36]$  при  $\alpha^l = 3.7$  (рис.2(г)).

Таким образом, интервал  $\sigma$ , в котором вероятность появления химер ненулевая, можно существенно увеличить, соответствующим образом настроив интенсивность аддитивного шума на определенное ненулевое значение. Подобный эффект демонстрирует конструктивную роль аддитивного шума, который ярко проявляется и характерен для явлений стохастического и когерентного резонансов. В этом контексте выявленную особенность влияния аддитивного шума на вероятность появления химерного состояния можно назвать **химерным резонансом**. Этот резонансо-подобный эффект не является исключительной особенностью динамики зашумленной сети нелокально связанных логистических отображений, но, как будет описано далее, обычно реализуется в сетях других хаотических систем с дискретным временем в присутствии аддитивного шума.

Рассмотрим подробнее эффект **химерного резонанса** в кольце нелокально связанных логистических отображений при воздействии аддитивного шума. Для этого исследуем распределение вероятностей

установления химер при большем числе начальных условий (100) при изменении силы связи и фиксированных значениях интенсивности шума, и наоборот (рис. 3).

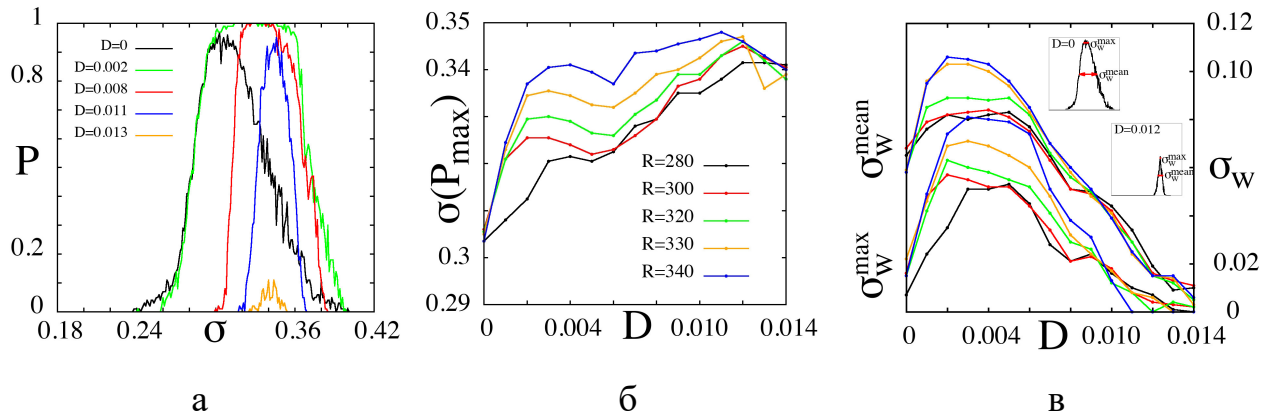


Рисунок 3: Зависимости вероятности  $P$  установления химерных состояния от (а) силы связи  $\sigma$  для пяти различных значений интенсивности шума  $D$ , (б) зависимость силы связи  $\sigma(P_{\max})$ , при которой наблюдается максимальная вероятность, от интенсивности шума  $D$  для пяти различных значений  $R$  (см. легенду в (б)), и (в) зависимость ширины  $\sigma$ -интервала на среднем уровне вероятности (верхние пять кривых  $\sigma_w^{\text{mean}}$ ) и на уровне 0.95 от максимума (нижние пять кривых  $\sigma_w^{\text{max}}$ ) от интенсивности шума  $D$  для пяти различных значений  $R$  (см. легенду в (а)). Уровни вероятности схематически обозначены на двух резонансных кривых  $P(\sigma)$ , показанных на вставках (в). Графики построены с использованием  $M = 100$  различных пар реализаций случайных начальных условий, случайно распределенных в интервале  $[0, 1]$  и реализаций генератора шума. Остальные параметры:  $\alpha^1 = 3.8$ ,  $R = 320$ ,  $N = 1000$

Зависимость вероятности установления химер  $P$  от силы связи между элементами  $\sigma$  представлена на рис.3(а) для пяти различных значений интенсивности шума  $D$ . Хорошо видно, что во всех случаях графики имеют резонансо-подобную форму. При  $D = 0$  ненулевая вероятность установления химер существует в интервале  $\sigma \in [0.238, 0.401]$ , однако максимальное значение  $P = 1$  никогда не достигается. При введении аддитивного шума очень малой интенсивности появляется некоторый  $\sigma$ -интервал, в котором вероятность существования химер максимальна ( $P \approx 1$ ) (график для  $D = 0.002$  на рис. 3(а)). Дальнейшее увеличение интенсивности шума существенно сужает  $\sigma$ -интервал высокой вероятности наблюдения химер (случаи  $D = 0.008$ ,  $D = 0.011$ ,  $D = 0.013$



на рис.3(а)). При этом как положение  $\sigma$ -интервала, так и резонансное значение  $\sigma$ , соответствующее максимальной вероятности, смещаются в сторону больших значений силы связи.

Для проверки общность выявленных характеристик эффекта **химерного резонанса**, мы провели численное моделирование для нескольких значений радиуса связи  $R$  (рис.3,(б-в)). Обнаруженный эффект **химерного резонанса** хорошо проиллюстрирован на рис.3(в). Уровни вероятности схематически обозначены на двух резонансных кривых  $P(\sigma)$ , показанных на вставках к рис.3(в). Представленные зависимости имеют резонансный вид и свидетельствуют о том, что существует некоторый оптимальный уровень шума  $D$  (различный для разных  $R$ ), при котором ширина  $\sigma$ -интервала, соответствующего максимальной вероятности наблюдения химер, является наибольшей. Также можно отметить, что ширина максимальных интервалов  $\sigma^{\text{mean}}_w$  и  $\sigma^{\text{max}}_w$  уменьшается по мере уменьшения числа соседей  $R$ . Максимальная ширина обоих  $\sigma$ -интервалов наблюдается при  $R = 340$ , а минимальная – при  $R = 280$  (синяя и черная кривые на рис.3(в) соответственно).

При исследовании ансамблей нелокально связанных отображений Эно и Рикера наблюдались схожие эффекты. Отметим, что в ансамбле отображения Рикера могут возникать уединенные состояния, которые немного искажали область существования химер. Однако во всех исследованных системах наблюдается **химерный резонанс**.

## Заключение

В выпускной квалификационной работе были проведены численные исследования влияния аддитивного гауссовского шума на пространственно-временную динамику и особенно на вероятность наблюдения химерных состояний в системах нелокально связанных хаотических систем с дискретным временем. Было исследовано три системы с различными парциальными элементами. Для каждой из них при отсутствии шума построены двумерные диаграммы пространственно-временных режимов на плоскости параметров «управляющий параметр – сила связи» и проанализированы особенности перехода от некогерентности к полной синхронизации при увеличении силы связи. Было обнаружено, что для всех трех систем существует когерентное окно, в области профилей с разрывами, эта особенность приводит к изменению областей с высокой вероятностью существования химерных состояний на плоскости силы связи и интенсивности шума.

Для анализа роли аддитивного шума в динамике систем были построены двумерные диаграммы распределения вероятности существования химеры на плоскости параметров «сила связи  $\sigma$  – интенсивность шума  $D$ ». Численное моделирование показало, что при наличии шума определенной интенсивности в исследуемых системах могут индуцироваться химерные состояния, причем вероятность их установления может быть значительно увеличена до максимального уровня (100%) на довольно большом интервале силы связи  $\sigma$ . Область на плоскости параметров  $(\sigma, D)$ , соответствующая высокой или даже максимальной вероятности наблюдения химер, может иметь различную форму в зависимости от управляющего параметра отдельных узлов в каждой рассматриваемой сети. В частности, эта область разбивается на две под области как по отношению к  $\sigma$ , так и по отношению к  $D$ , если значения управляющего параметра относятся к когерентному окну динамики системы без шума. В пределах канала, разделяющего две области, вероятность наблюдения химер

либо равна нулю (для кольца логистических отображений), либо достаточно мала (около 0.2 или 0.5 для кольца отображений Эно и кольца модифицированных отображений Рикера соответственно). Установлено, что существует оптимальный ненулевой уровень шума, при котором  $\sigma$ -интервал, соответствующий высокой или даже максимальной вероятности наблюдения химер, является наибольшим. Наблюдаемое явление свидетельствует о благотворной и конструктивной роли шума по аналогии со стохастическим и когерентным резонансом. В связи с этим обнаруженный эффект получил название **химерный резонанс**. Значение силы связи  $\sigma$ , при которой химерные состояния наблюдаются с максимальной вероятностью, немонотонно возрастает с ростом интенсивности шума  $D$  в пределах области существования химер и уменьшается с уменьшением радиуса связи  $R$ . Было также обнаружено, что существует конечный диапазон интенсивности шума  $D$ , в пределах которого химерные состояния наблюдаются с высокой или даже максимальной вероятностью. Этот  $D$ -диапазон является наиболее широким при некотором «резонансном» значении силы связи  $\sigma$ .

Помимо наличия когерентного окна на диаграммах динамических режимов исследуемых сетей, на форму распределения вероятностей наблюдения химер также может существенно влиять наличие в сети уединённых состояний. В нашем исследовании это наблюдалось в сети модифицированных отображений Рикера. Показано, что при малых уровнях шума и достаточно сильной связи  $\sigma$  область с высокой вероятностью существования химер разрезается треугольной областью, внутри которой в сети имеет место некогерентная динамика.

Наши исследования и полученные результаты еще раз показывают конструктивную роль шума в динамике сложных сетей и возможность использования внешнего шума в качестве эффективного инструмента управления формированием и устойчивостью наблюдаемых пространственно-временных структур.

Результаты проведенных исследований были представлены на следующих конференциях:

1. **Нечаев В.А.**, Рыбалова Е.В., Стрелкова Г.И. «Влияние аддитивного шума на вероятность появления химерных состояний», XXX Всероссийская научная конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», 15-19 мая 2023, Саратов, Россия (стендовый доклад)
2. **Нечаев В.А.**, Рыбалова Е.В., Стрелкова Г.И. Saratov State University «Effect of additive noise on the probability of observing chimera states», The XXVI Saratov Fall Meeting 2022, Workshop on Nonlinear Dynamics XIII, September 28 – September 29, 2022, Saratov, Russia (устный доклад)
3. **Нечаев В.А.**, Рыбалова Е.В., Стрелкова Г.И. «Зависимость вероятности появления химер в кольце нелокально связанных отображений от интенсивности аддитивного шума», XX НАУЧНАЯ ШКОЛА «НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ – 2022» Нижний Новгород, 7 – 13 ноября 2022 г (стендовый доклад, содокладчик)

По результатам исследования были опубликованы две работа:

1. **Нечаев В. А.**, Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И. Влияние неоднородности параметров на существование химерных структур в кольце нелокально связанных отображений //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2021. – Т. 29. – №. 6. – С. 943-952.
2. Rybalova E., **Nechaev, V.**, Schöll, E., Strelkova, G. Chimera resonance in networks of chaotic maps //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2023. – Т. 33. – №. 9.