МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждениевысшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики
наименование кафедры

Формирование портфеля ценных рисковых бумаг с заданным соотношением доходности и риска

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 441 группы

направление 09.03.03 — «Прикладная информатика»
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Трусовой Галины Юрьевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

Зав. кафедрой, д.ф.- м.н., профессор		С.И.Дудов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

Зав. кафедрой, д.ф.- м.н., профессор		С.И.Дудов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы данной работы в современном мире заключается в том, что любая сфера человеческой деятельности, в особенности экономика, напрямую связана с принятием решений в условиях неполноты информации.

Одними из причин этой неопроделенности могут быть: нестабильность экономической или политической ситуаций, неопределенность действий партнеров по бизнесу, случайные факторы и так далее.

Выражаясь простым языком, большое число обстоятельств просчитать или предугадать может быть невозможно.

Экономические решения с учетом перечисленных и множества других неопределенных факторов принимаются в рамках теории принятия решений — аналитического подхода к выбору наилучшего действия, то есть альтернативы, или последовательности действий. В теории принятия решений рассматриваются различные типы моделей в зависимости от степени определенности возможных исходов или последствий различных действий, с которыми сталкивается лицо, принимающее решение. Однако в этой работе используется только один - выбор решения при риске, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов.

Следует знать, что формирование оптимизации ценных рисковых бумаг строится с учетом потребностей, целей и требований выгодоприобритателя портфеля.

1. Доходность,
2. Показатель риска.

Эти два пункта являются основными характеристиками любой ценной бумаги.Под риском подразумевается угроза потери лицом или организацией части своих ресурсов, недополучения доходов или появления дополнительных расходов в результате осуществления определенной производственной и финансовой политики. И итог финансового решения напрямую зависит от учета данного факта. Ценные бумаги, обладающие высоким показателем риска, дают большую доходность и наоборот. Отсюда напрашивается вывод, что риска избежать невозможно и его нужно всегда учитывать.

Однако существуют не только рисковые, но и безрисковые ценные бумаги, однако они обладают хоть и стабильной, но маленькой доходностью. Это является хорошим решением для тех инвесторов, которые хотят вложиться и получать стабильные выплаты по ценным бумагам.

Целью данной выпускной квалифицированной работы является изучение основ портфельного инвестирования и применение полученных знаний при проведении вычислительных экспериментов на реальных данных.

Задачами данной работы является:

1. Изучение необходимого материала для изложения понятий и решения задач;
2. Изложение необходимых понятий;
3. Решение задач;
4. Написание программы для решения задач.

СТРУКТУРА

В данной работе представлена теория, помогающая изучению портфельного инвестирования, словесная и математическая постановка и решение задачи об эффективном портфеле с заданным соотношением доходности и риска, также рассмотрение нескольких экспериментов, заключение и список использованных источников.

ОСНОВНОЕ СОЖЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В ходе работы обсуждается выбор идеальной стратегией инвестирования для инвестора в рамках подхода «доходность - риск» была бы стратегия, которая обеспечивает достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Однако одновременное достижение этих целей невозможно. Потому как на практике большему значению доходности соответствует большее значение риска.

Данный подход был сформулирован Г. Марковицем. Дальнейшее развитие подход получил благодаря работам Дж. Тобина, У. Шарпа, С. Росса и др.

Постановка задачи Марковица. Задача заключается в отыскании структуры $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ портфеля, которая обеспечила бы достижение заданной ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальным риском.

Математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

$$D_p = x^T V x \to \min_x, \tag{1}$$

$$I^T x = 1, \quad m^T x = m_p. \tag{2}$$

Где $I = (1, 1, ..., 1)^T \in R_n$.

Два конечных соотношения 1 и 2 являются формолизованным описанием задачи отыскания оптимального портфеля рисковых ценных бумаг, иными словами задачи Марковица.

Также, вектор x^* является не просто решением задачи, а также определяет структуру оптимального портфеля среди всех возможных портфелей с ожидаемой доходностью m_p.

Нужно отметить, что в данном случае некоторые компоненты вектора x^* могут принимать отрицательные значения, что означает рекомендацию инвестору совершить относительно соответствующих активов операцию «короткая продажа».

Множество возможных или достижимых портфелей, в данном случае это множество всех портфелей, удовлетворяющих условиям 2 [**?**].

Аналитическое решение поставленной задачи. Задача 1 - 2 представляет собой классическую задачу на условный экстремум с двумя ограничениями типа равенства. Все функции, определяющие постановку задачи, являются непрерывно дифференцируемыми на R^n. Следовательно, для ее решения можно использовать теорему Лагранжа. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид

$$L(x,\lambda) = \lambda_0 x^T V x + \lambda_1 (I^T x - 1) + \lambda_2 (m^T x - m_p). \tag{3}$$

Градиенты функций $(I^T x - 1)'_x = I$ и $(m^T x - m_p)'_x = m$ можно считать линейно независимыми, ввиду тривиальности задачи в противном случае. Поэтому множитель λ_0 можно считать равным 1.

Также стоит отметить, что любое нижнее лебегово множество целевой функции $\{x \in R^n : x^T V x \leqslant \alpha\}$, ввиду положительной определенности матрицы V, представляет собой эллипсоид, а значит, является ограниченным замкнутым множеством. Поэтому, применяя теорему Вейерштрасса, не трудно сделать вывод о том, что решение задачи заведомо существует.

Итак, в соответствии с теоремой Лагранжа, если вектор x является решением данной задачи, то существуют такие λ_1 и λ_2, что $L'_x(x,\lambda) = 0_n$.

Учитывя вид 3 функции Лагранжа и полагая, что $\lambda_0 = 1$, получаем

$$L'_x(x,\lambda) = 2Vx + \lambda_1 I + \lambda_2 m = 0.$$

Получаем

$$Vx = -\frac{\lambda_1}{2} I - \frac{\lambda_2}{2} m. \tag{4}$$

Поскольку положительно определенная матрица V невырождена, то умножая слева правую и левую части равенства 4 на обратную матрицу V^{-1}, имеем

$$x = -\frac{\lambda_1}{2} V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} V^{-1} m. \tag{5}$$

Подставив 5 в равенства 2:

$$-\frac{\lambda_1}{2} I^T V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} I^T V^{-1} m = 1, \tag{6}$$

$$-\frac{\lambda_1}{2} m^T V^{-1} I - \frac{\lambda_2}{2} m^T V^{-1} m = m_p. \tag{7}$$

Решая линейную относительно λ_1 и λ_2 систему уравнений 6 - 7 и подставляя найденное решение в 5, получаем оптимальную структуру портфеля x^* в виде

$$x^* = b + c m_p, \tag{8}$$

где b и c - векторы размерности n:

$$b = \frac{1}{d}(a_{22} V^{-1} I - a_{12} V^{-1} m), \tag{9}$$

$$c = \tfrac{1}{d}(a_{11} V^{-1} m - a_{12} V^{-1} I),$$

а d и a_{ij} - следующие числовые значения:

$$a_{11} = I^T V^{-1} I, \quad a_{12} = I^T V^{-1} m,$$

$$a_{22} = m^T V^{-1} m, \quad d = a_{11} a_{22} - a_{12}^2.$$

Портфель ценных бумаг со структурой, определяемой по формуле 8, будем называть оптимальным по Марковицу. Ему соответствует минимальная дисперсия доходности портфеля, определяемая по формуле:

$$\sigma_p^2 = x^{*T} V x^* = m_p^2 c^T V c + 2 m_p b^T V c + b^T V b. \tag{10}$$

При невозможности операции «короткая продажа» необходимо наложить дополнительное ограничение на структуру портфеля вида $x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$. Для решения получаемой задачи используются численные методы для приближённого решения.

Постановка задачи об эффективном портфеле с заданным соотношением доходности и риска

Инвестору требуется сформировать эффективный портфель с максимальной доходностью и заданным (фиксированным) отношением доходности к риску.

Математическая формулировка задачи выглядит следующим образом:

$$m^T x \to \max$$

$$I^T x = 1, \quad \frac{x^T V x}{(m^T x)^2} = t^2. \tag{11}$$

Величина $t > 0$ выражает фиксируемое отношение риска к доходности. **Решение**. Задачу (11) можно решить, как и задачу Марковица, с помощью теоремы Лагранжа. Однако, зная уже решение задачи Марковица при любых значениях ожидаемой доходности m_p, но можно предложить более простой путь решения.

В самом деле, в соответствии с решением задачи Марковица риск и ожидаемая доходность эффективных портфелей связаны равенством:

$$\sigma_p^2 = \alpha m_p^2 + \beta m_p + \gamma, \tag{12}$$

где, учитывая положительную определенность матрицы ковариаций V:

$$\alpha = c^T V c > 0, \quad \beta = 2b^T V c, \quad \gamma = b^T V b > 0.$$

Кроме того, из (2.12) следует, что уравнение

$$\alpha m_p^2 + \beta m_p + \gamma = 0$$

не должно иметь решения. Следовательно выполняется неравенство:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0. \tag{13}$$

Пусть $\sigma_p = m_p t$. Выполняя подстановку в (12), получаем уравнение:

$$(\alpha - t^2)m_p^2 + \beta m_p + \gamma = 0. \tag{14}$$

Его формальным решением, с учетом возможности комплексных корней, является:

$$m_p = \begin{cases} \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma(\alpha - t^2)}}{2(\alpha - t^2)}, & \text{если} \quad \alpha \neq t^2 \\ -\frac{\gamma}{\beta}, & \text{если} \quad \alpha = t^2 \end{cases} \tag{15}$$

Рассмотрим возможные варианты. При этом будем учитывать, что дискриминант квадратного уравнения (14) становится неотрицательным при условии $\beta^2 - 4\gamma(\alpha - t^2) \geqslant 0$ или

$$t \geqslant \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}}. \tag{16}$$

Отметим, что подкоренное выражения в правой части неравенства (16) положительно в силу (13).

1) Рассмотрим случай $\beta < 0$.

Тогда из (15) следует, что при

$$\sqrt{\alpha - \tfrac{\beta^2}{4\gamma}} \leqslant t < \sqrt{\alpha}$$

уравнение (14) имеет два положительных корня

$$m_p = \tfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma(\alpha - t^2)}}{2(\alpha - t^2)}.$$

В этом случае будем далее выбирать наибольшие значеня доходности, то есть:

$$m_p = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma(\alpha - t^2)}}{2(\alpha - t^2)}. \tag{17}$$

Если же $t > \sqrt{\alpha}$, то из (15) получаем только один вариант положительного корня, а именно:

$$m_p = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma(\alpha - t^2)}}{2(\alpha - t^2)}. \tag{18}$$

А в случае $t = \sqrt{\alpha}$, кк в следует из 14 получаем:

$$m_p = -\frac{\gamma}{\beta} \tag{19}$$

2) Пусть теперь $\beta > 0$. Ввиду положительности α и γ, из (14) следует, что возможен только вариант для $t > \sqrt{\alpha}$. Иначе положительного корня уравнения (14) не существует.

При этом, как следует из (15), положительный корень соответствует формуле (18).

3) Теперь рассмотрим случай, когда $\beta = 0$. Из уравнения (14) следует, что положительный корень для m_p возможен только при $t > \sqrt{\alpha}$ и при этом

$$m_p = \sqrt{\tfrac{\gamma}{t^2-\alpha}}.$$

В итоге, решение нашей задачи, в смысле выбора значения доходности, будет определяться по формуле:

$$m_p = \begin{cases} \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma(\alpha-t^2)}}{2(\alpha-t^2)}, \quad \text{если} \quad \beta < 0, \quad \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}} \le t < \sqrt{\alpha}, \\ \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma(\alpha-t^2)}}{2(\alpha-t^2)}, \quad \text{если} \quad t > \sqrt{\alpha}, \\ -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \text{если} \quad \beta < 0, \quad t = \sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\frac{\gamma}{t^2-\alpha}}, \quad \text{если} \quad \beta = 0, \quad t > \sqrt{\alpha}. \end{cases}$$

Таким образом приходим к следующим выводам:

1. Если $\beta < 0$, то допустимые значения для t - это $[\sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}}, \infty)$, то есть $t \ge \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}}$.

   При этом, если $\sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}} \le t < \sqrt{\alpha}$, то доходность искомого портфеля определяется формулой (17). А если $t > \sqrt{\alpha}$, то формулой (18). И при $t = \sqrt{\alpha}$ оно определяется формулой (19);
2. Если $\beta \ge 0$, то допустимыми значениями для t является диапазон $(\sqrt{\alpha}, \infty)$, то есть $t > \sqrt{\alpha}$.

   При этом доходность искомого эффективного портфеля определяется формулой (18), если $\beta > 0$ и формулой $\sqrt{\frac{\gamma}{t^2-\alpha}}$, если $\beta = 0$.

Получив искомое значение доходности m_p, мы подставляем его в формулы (8) и (10) получим структуру соответствующего портфеля x^* и его риск σ^*.

Для того, чтобы использовать в процессе вычислений выведенные формулы (17) - (19), получим коэффициенты α, β и γ в явном виде.

$$\alpha = c^T V c = \tfrac{1}{d^2}(a_{11}V^{-1}m - a_{12}V^{-1}I)^T V(a_{11}V^{-1}m - a_{12}V^{-1}I) =$$
$$\tfrac{1}{d^2}(a_{11}V^{-1}m - a_{12}V^{-1}I)^T(a_{11}m - a_{12}I) =$$
$$\tfrac{1}{d^2}(a_{11}^2 m^T V^{-1}m - a_{11}a_{12}m^T V^{-1}I - a_{11}a_{12}I^T V^{-1}m + a_{12}^2 I^T V^{-1}I) =$$
$$\tfrac{1}{d^2}(a_{11}^2 a_{22} - a_{11}a_{12}^2 - a_{11}a_{12}^2 + a_{11}a_{12}^2) = \tfrac{1}{d^2}a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = \tfrac{a_{11}}{d};$$

$$\beta = 2b^T V c = \tfrac{2}{d^2}(a_{22}V^{-1}I - a_{12}V^{-1}m)^T V(a_{11}V^{-1}m - a_{12}V^{-1}I) =$$
$$\tfrac{2}{d^2}(a_{22}V^{-1}I - a_{12}V^{-1}m)^T(a_{11}m - a_{12}I) =$$
$$\tfrac{2}{d^2}(a_{22}a_{11}I^T V^{-1}m - a_{22}a_{11}I^T V^{-1}I - a_{12}a_{11}m^T V^{-1}m + a_{12}^2 m^T V^{-1}I) =$$
$$\tfrac{2}{d^2}(a_{22}a_{11}a_{12} - a_{22}a_{12}a_{11} - a_{12}a_{11}a_{22} + a_{12}^3) = \tfrac{2}{d^2}a_{12}(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = -\tfrac{2a_{12}}{d};$$

$$\gamma = b^T V b = \tfrac{1}{d^2}(a_{22}V^{-1}I - a_{12}V^{-1}m)^T V(a_{22}V^{-1}I - a_{12}V^{-1}m) =$$
$$\tfrac{1}{d^2}(a_{22}V^{-1}I - a_{12}V^{-1}m)^T(a_{22}I - a_{12}m) =$$
$$\tfrac{1}{d^2}(a_{22}^2 I^T V^{-1}I - a_{22}a_{12}I^T V^{-1}m - a_{12}a_{22}m^T V^{-1}I + a_{12}^2 m^T V^{-1}m) =$$
$$\tfrac{1}{d^2}(a_{22}^2 a_{11} - a_{22}a_{12}^2 - a_{12}^2 a_{22} + a_{12}^2 a_{22}) = \tfrac{1}{d^2}a_{22}(a_{22}a_{11} - a_{12}^2) = \tfrac{a_{22}}{d}.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Первая часть практической работы заключается в проведении вычислительных эксперементов на основе модельных данных. Данные были предоставлены научным руководителем.

В первом случае было дано:

$m_p = (10, 12, 15)$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1111 \end{pmatrix}$$

Для значений t от $t_{\min} = 0.08$ до $t_{\max} = 0.48$ с шагом $h = 0.1$ получены эффективные портфели со следующей структурой распределения капитала и значениями доходности и риска:

tp	x1	x2	x3	mp	sp
0.08	0.68	0.20	0.11	10.98	0.87
0.18	-0.43	0.64	0.79	15.22	2.72
0.28	-1.81	1.19	1.62	20.49	5.71
0.38	-4.51	2.25	3.25	30.78	11.66
0.48	-12.42	5.38	8.05	60.99	29.20

Их графическое изображение на фронте Марковица выглядит следующим образом:

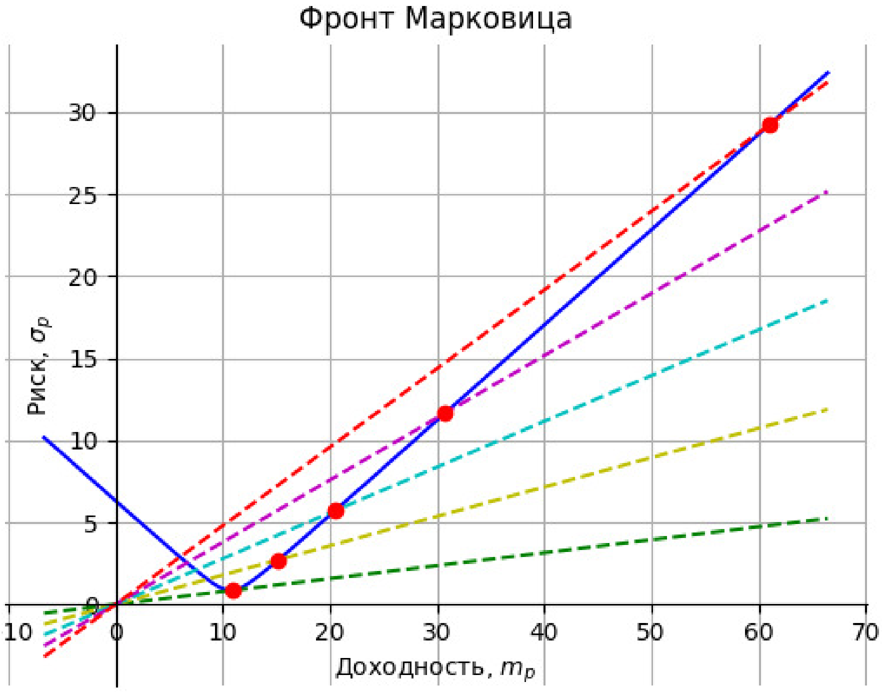

Рисунок 1: Эффективные портфели с заданным соотношением доходности

Далее проводятся еще два эксперемента по этому же принципу, но с разными значениями матриц.

Вторая часть практической работы заключается в составлении протфелей и так же, как и в первой части, построить таблицу и график к каждому случаю.

Для проведения эксперимента были взяты реальные данные цен открытий акции 3 компаний: «Татнефть», «Полюс», «Тинькофф Бан».

Было решено провести 6 экспериментов. В результате были составлены портфели на июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь и декабрь.

Чтобы найти математическое ожидание компаний – вектор m_p, нужно сложить все числа и поделить на количество месяцев, которые рассматриваются в эксперименте. Проделав эту процедуру в Exel для первого случая:

$m = (0,017724624; 0,001911214; 0,144231705)$

И такую матрицу ковариаций:

$$V = \begin{pmatrix} 0,009101362 & -0,00177064 & 0,001147102 \\ -0,00177064 & 0,006466099 & -0,00538966 \\ 0,001147102 & -0,00538966 & 0,010842147 \end{pmatrix}$$

Результаты данного эксперемента:

t	x1	x2	x3	mp	σ
0.65	0.18	0.49	0.33	0.05	0.03
0.59	-0.08	0.36	0.72	0.10	0.06
0.69	-0.35	0.23	1.11	0.15	0.11
0.76	-0.61	0.10	1.50	0.21	0.16
0.80	-0.87	-0.03	1.89	0.26	0.21

Графически данные решения будет иметь вид:

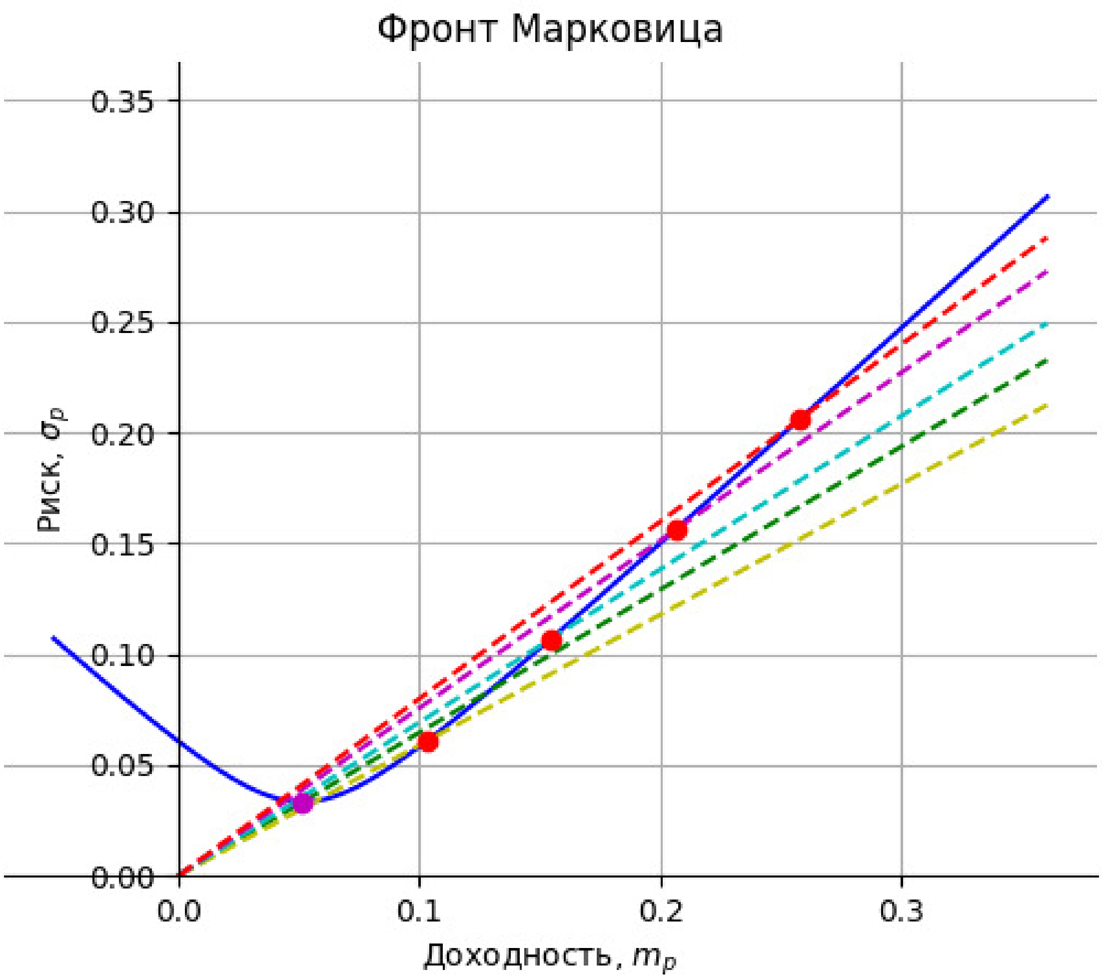

Рисунок 2: Эффективные портфели с заданным соотношением доходности

Остальные 5 эксперементов проводятся аналогичным образом.

Все точки являются портфелями, которые можно использовать, все зависит от самой цели инвестора, который будет использовать тот или иной портфель. Самая нижняя точка является портфелем с минимальным риском, но и доходность тоже минимальная. Самая высокая точка наоборот, с самой высокой доходностью, но и риск тоже больше.

В приложении находится программный код, который по полученным формулам и данным строит таблицу и график, показанные на изображениях к эксперементам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена задача Г. Марковица и задача оптимизации структуры портфеля с заданным соотношением доходности и риска и проведение исследования экспериментальным способом портфеля ценных бумаг 3-ёх разных компаний. В итоге, мы решили экономические задачи путём нахождения структуры портфеля, значение доходности и риска.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

```
 # -*- coding: utf-8 -*-
"""
Spyder Editor

This is a temporary script file.
"""
import numpy as np     # импорт математической библиотеки NumPy

#m=np.array([[10,12,15]])                # доходности ценных бумаг
#V=np.array([[1,0,0],[0,4,0],[0,0,9]])  # матрица ковариаций



#m=np.array([[0.017724624, 0.001911214, 0.144231705]])
#V=np.array([[0.009101362, -0.00177064, 0.001147102],
#            [-0.00177064, 0.006466099, -0.00538966],
#            [0.001147102, -0.00538966,0.010842147]])

#m=np.array([[-0.006805103,0.002476038,0.117734603]])
#V=np.array([[0.010351853,-0.001613886,0.004610364],
#            [-0.001613886,0.006737625,-0.004831087],
#            [0.004610364,-0.004831087,0.016176542]])

#m=np.array([[-0.030876652,-0.005184865,0.093685351]])
#V=np.array([[0.005344773,-0.001398716,0.001359128],
#            [-0.001398716,0.00715948,   -0.004006147],
#            [0.001359128,-0.004006147,0.014671394]])

#m=np.array([[0.00803351,-0.020814726,0.069997705]])
#V=np.array([[0.003084919,-0.002383839,0.001957958],
#            [-0.002383839,0.008338543,-0.002885072],
#            [0.001957958,-0.002885072,0.015780585]])
```

```
#m=np.array([[0.013912553,-0.015725788,0.094262743]])
#V=np.array([[0.003255057,-0.001950999,0.001481199],
#             [-0.001950999,0.012286193,0.000904153],
#             [0.001481199,0.000904153,0.011579306]])

m=np.array([[-0.009029176,-0.015783757,0.0491575]])
V=np.array([[0.007674283,-0.001520892,0.006077306],
            [-0.001520892,0.013293534,0.002247081],
            [0.006077306,0.002247081,0.011108514]])


iV=np.linalg.inv(V)

a=(np.ones((1,3))).dot(iV)
a11=a.dot(np.ones((3,1)))
a12=a.dot(np.transpose(m))
a=m.dot(iV)
a22=a.dot(np.transpose(m))
d=a11*a22-a12*a12

b=(a22/d)*iV.dot(np.ones((3,1)))-(a12/d)*iV.dot(np.transpose(m))
c=(a11/d)*iV.dot(np.transpose(m))-(a12/d)*iV.dot(np.ones((3,1)))

a=V.dot(c)
alpha=(np.transpose(c)).dot(a)
beta=2*(np.transpose(b)).dot(a)
a=V.dot(b)
gamma=(np.transpose(b)).dot(a)

mp0=-beta/(2*alpha)   # экстремум кривой доходности


if beta>0: mp1=-mp0/2
```

```
else: mp1=mp0

mp=np.concatenate([mp1, 2*mp1, 3*mp1, 4*mp1, 5*mp1])
sp=np.sqrt(alpha*np.square(mp)+beta*mp+gamma)
t=np.divide(sp,mp)

x=(np.ones((5,1))).dot(np.transpose(b))+mp.dot(np.transpose(c))

data=np.concatenate([t, x, mp, sp], axis=1)

print(" ".join(map(str,['   t  ','   x1  ','

x2  ','   x3  ','   mp  ','   '+chr(963)])))
print("-----------------------------------------------")

for j in range(5):
  str=''
  for i in range(6):
      str+="%6.2f" % data[j,i]
      str+='  '
  print(str)

import matplotlib.pyplot as plt

dm=max(mp)-min(mp)

mx=np.matrix(min(mp)-0.5*dm+2*dm*np.arange(1000)/1000).T

j=0
while mx[j,0]<0: j=j+1
mxn=mx[0:j,0]
mxp=mx[j:,0]
```

```
if mp[0,0]>0: mx0=np.copy(mxp)
else: mx0=np.copy(mxn)
if mp[1,0]>0: mx1=np.copy(mxp)
else: mx1=np.copy(mxn)
if mp[2,0]>0: mx2=np.copy(mxp)
else: mx2=np.copy(mxn)
if mp[3,0]>0: mx3=np.copy(mxp)
else: mx3=np.copy(mxn)
if mp[4,0]>0: mx4=np.copy(mxp)
else: mx4=np.copy(mxn)

#mx=np.matrix(1.2*max(mp)*np.arange(-100,1000)/1100).T
s=np.sqrt(alpha[0,0]*np.square(mx)+beta[0,0]*mx+gamma[0,0])

plt.title("Фронт Марковица")   # заголовок
plt.xlabel("Доходность, $m_p$")   # ось абсцисс
plt.ylabel("Риск, $\sigma_p$")   # ось ординат
plt.grid()  # включение отображение сетки
plt.plot(mx,s,'b',
         mx0,((sp[0,0])/mp[0,0])*mx0,'--g',
         mx1,((sp[1,0])/mp[1,0])*mx1,'--y',
         mx2,((sp[2,0])/mp[2,0])*mx2,'--c',
         mx3,((sp[3,0])/mp[3,0])*mx3,'--m',
         mx4,((sp[4,0])/mp[4,0])*mx4,'--r',
         mp[1:5,0],sp[1:5,0],'ro',
         mp[0,0],sp[0,0],'mo'

         )      # вывод графиков
ax = plt.gca()
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
```

```
ax.set_ylim([0,1.2*max(s)])
ax.spines['left'].set_position(('data',0))
ax.spines['right'].set_visible(False)

plt.show(block=True)
```