

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра общей, теоретической и компьютерной физики

**Отталкивающая сила Казимира в топологических материалах**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 4022 группы  
направления 03.03.02 «Физика» Института физики  
Чебухановой Виктории Константиновны

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

Д. В. Чурочкин

Заведующий кафедрой общей, теоретической и  
компьютерной физики

профессор, д. ф.-м. н.

В. М. Аникин

Саратов 2022

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** До настоящего времени слабо исследованным остается вопрос о характере сил Казимира в системах состоящих из топологических материалов. Рассматриваемый в данной выпускной квалификационной работе эффект возникновения отталкивающей силы Казимира в системе двух топологических изоляторов может быть использован для конструирования наноэлектромеханических систем, элементы которых устойчивы к слипанию друг с другом.

**Целью** данной выпускной квалификационной работ является анализ условий возникновения отталкивательной силы Казимира в системе двух топологических изоляторов.

Для достижения этой цели решались следующие **задачи**:

- Анализ математического аппарата квантовой механики.
- Рассмотрение задачи Казимира-Лифшица об энергии взаимодействия двух пронизаемых поверхностей, помещенных в вакуум.
- Анализ теории топологических инвариантов в применении к двумерным топологическим изоляторам.
- Анализ аксионной электродинамики, как модели взаимодействия электромагнитного поля с топологическим изолятором.
- Рассмотрение взаимодействия атома водорода с топологическим изолятором.
- Рассмотрение задачи рассеяния электромагнитных волн на границе раздела топологический изолятор/вакуум.
- Анализ взаимодействия двух топологических изоляторов помещенных в вакуум в рамках формализма Казимира-Лифшица.

**Предмет исследования.** Данная выпускная квалификационная работа посвящена теоретическому исследованию взаимодействия двух топологических изоляторов помещенных в вакуум.

### **Структура и объем ВКР**

Выпускная квалификационная работа (бакалаврская работа) состоит из введения; четырех основных разделов (1.Теория Казимира-Лифшица, 2. Электродинамика топологических изоляторов, 3. Взаимодействие топологического изолятора с атомом водорода, 4. Отталкивающая сила Казимира в системе из двух взаимодействующих топологических изоляторов); заключения; списка использованных источников (21 наименование); двух приложений (А. Уравнение Дирака, Б. Расчет подынтегрального выражения формулы Лифшица для случая двух топологических изоляторов).

Материалы работы изложены на 46 страницах.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы выпускной квалификационной работы, определена цель работы. Представлен широкий исторический контекст физики, основанной на открытии эффекта Казимира [1,2]. В частности, отмечены основополагающие работы Е.М. Лифшица, И. Е. Дзялошинского, Л. П. Питаевского [3,4], касающиеся теоретического обобщения результата Х. Казимира на случай произвольных проницаемых поверхностей, заполненных произвольной средой. Указывается, что, согласно [4], при определенных условиях на диэлектрические проницаемости, участвующих во взаимодействии Казимира сред, возможно возникновение силы отталкивания Казимира по механизму качественно представленному на Рисунке 1.

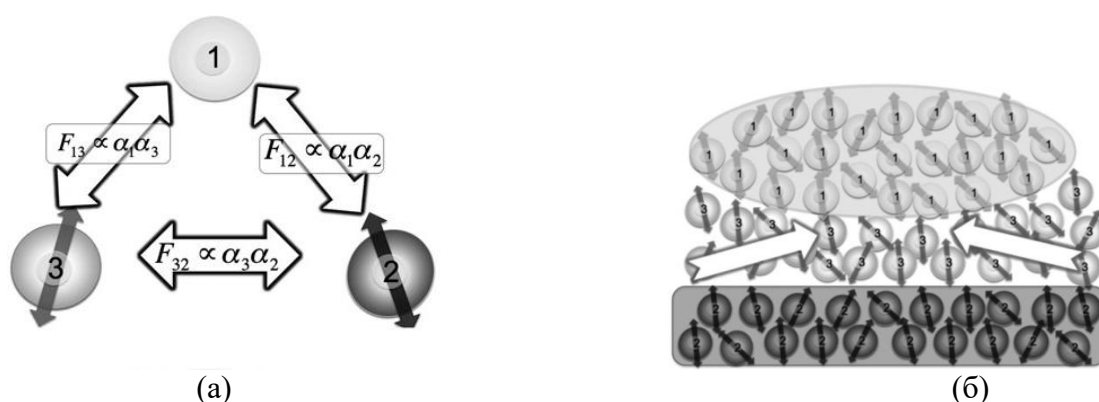


Рисунок 1 - Качественная модель отталкивающих сил Казимира-Лифшица.

Отталкивающие силы могут существовать между двумя материалами, схематически представленными как ансамбль молекул, разделенных третьим, обычно жидкостью, обладающей специфическими оптическими свойствами. 2.а - все три отдельные молекулы будут испытывать взаимодействие притяжения. 2.б - для совокупности молекул, с поляризуемостями подчиняющимся неравенству  $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$ , для молекул с наибольшими поляризуемостями ( $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  для данного примера) энергетически более благоприятно находиться близко, что приводит к увеличению расстояния между молекулами типа 1 и типа 2. Для конденсированной системы чистое взаимодействие между материалом 1 и материалом 2 является отталкивающим, если соответствующие диэлектрические проницаемости удовлетворяют  $\epsilon_1 > \epsilon_3 > \epsilon_2$ , как следствие аналогичного неравенства между поляризуемостями.

Установленная теоретически существенная зависимость характера силы Казимира от характеристик участвующих во взаимодействии Казимира делает актуальной рассмотрение взаимодействия Казимира в системах дираковских материалов, к которым, в частности, относятся топологические изоляторы [5,6,7]. Характерной особенностью этих материалов является наличие сильного спин-орбитального взаимодействия, приводящего к

инверсии зон, и как следствие возникновению топологически устойчивых проводящих безщелевых поверхностных состояний на границе раздела топологический диэлектрик/обычный диэлектрик по механизму качественно представленному на Рисунке 2.

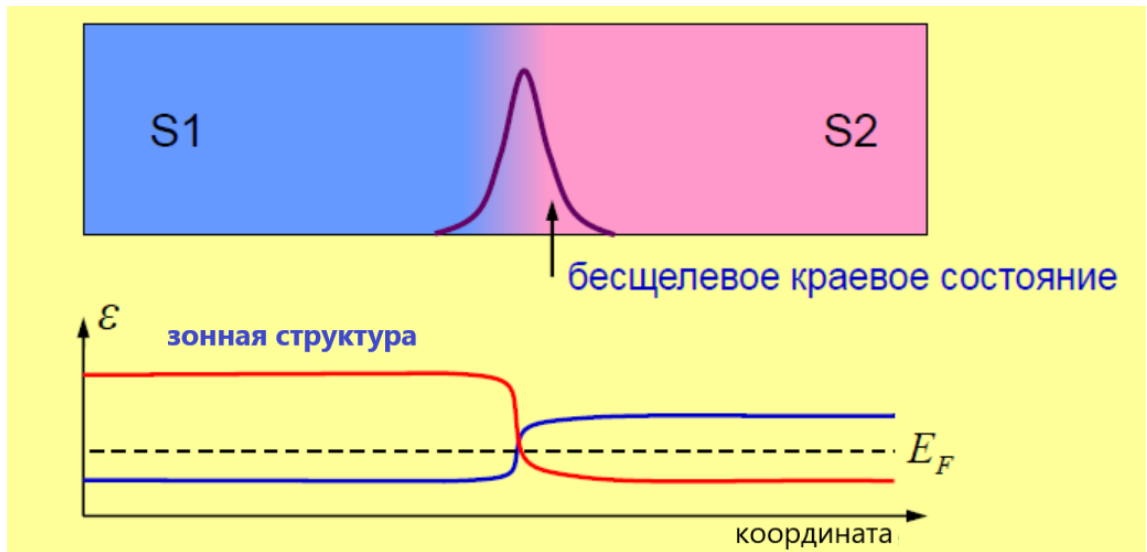


Рисунок 2 - Качественная схема поведения зонной структуры на границе раздела обычный диэлектрик – топологический диэлектрик.

Указывается, что описание взаимодействия топологического изолятора с электромагнитным полем может быть описано в рамках модели аксионной электродинамики [8,9,10].

**В разделе 1** рассмотрена теория Казимира-Лифшица в рамках теории рассеяния [1].

Показано, что свободная энергия Казимира запишется в виде

$$F = k_B T \sum'_m \text{Tr} \ln D(i\xi_m), \quad \xi_m \equiv \frac{2\pi m k_B T}{\hbar}, \quad (1)$$

где Tr обозначает операцию взятия следа матрицы; матрица  $D$  (принимает значения на мацубаровских частотах  $\omega_m = i\xi_m$ ) является знаменателем матрицы рассеяния. Она описывает резонансные свойства полости созданной двумя объектами 1 и 2 и принимает вид

$$D = 1 - R'_1 e^{-KL} R_2 e^{-KL}, \quad (2)$$

где  $R'_1$  и  $R_2$  – матрицы отражения двух объектов 1 и 2, а  $e^{-KL}$  описывает распространение моды между отражениями на двух объектах.

**В разделе 2** рассмотрена модель аксионной электродинамики описывающей взаимодействие электромагнитного поля с топологическим изолятором. В основе модели модифицированные уравнения Максвелла:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho + \frac{\alpha}{\pi} \nabla \cdot (\theta \vec{B}), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{\alpha}{\pi} \left( \nabla \theta \times \vec{E} + \frac{1}{c} (\partial_t \theta) \vec{B} \right), \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}. \quad (6)$$

Здесь  $\alpha \equiv e^2 / \hbar c \approx 1/137$  – постоянная тонкой структуры и  $\rho$  – объемная плотность внешнего заряда, а  $\vec{j}$  – плотность внешнего тока;  $\theta$  – топологический параметр. Топологические изоляторы, оптические свойства которых описываются модифицированными уравнениями Максвелла, также известны как аксионные топологические изоляторы.

Уравнения могут быть представлены в форме, похожей на обычные уравнения Максвелла, если использовать тождества

$$\nabla \theta \times \vec{E} = \nabla \times (\theta \vec{E}) - \theta \nabla \times \vec{E}, \quad (\partial_t \theta) \vec{B} = \partial_t (\theta \vec{B}) - \theta \partial_t \vec{B}.$$

определить модифицированные характеристики, как  $\vec{H}' = \vec{H} + (\alpha/\pi)\theta \vec{E}$  и  $\vec{D}' = \vec{D} - (\alpha/\pi)\theta \vec{B}$ . Тогда уравнения (3) - (6) примут вид:

$$\nabla \cdot \vec{D}' = 4\pi\rho, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla \times \vec{H}' = \frac{1}{c} \partial_t \vec{D}' + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (9)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}. \quad (10)$$

Топологический параметр  $\theta$  может быть использован для определения отличия топологического изолятора от тривиального изолятора: для топологического изолятора  $\theta = (2n+1)\pi$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ), тогда как для тривиального изолятора  $\theta = 0$ . Оказывается, что  $\theta$  относится к  $\mathbb{Z}_2$  инварианту (далее значение параметра  $\nu$ ) следующим образом:  $e^{i\theta} = 1$  соответствует  $\nu = 0$ , в то время как  $e^{i\theta} = -1$  соответствует  $\nu = 1$ .

Как обычно, следует дополнить представленную систему уравнений граничными условиями на произвольной границе  $\Sigma$ , которые в отсутствие источников принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E}_n \Big|_{\Sigma} &= \tilde{\theta} \vec{B}_n \Big|_{\Sigma}, & \Delta \vec{B}_{\parallel} \Big|_{\Sigma} &= -\tilde{\theta} \vec{E}_{\parallel} \Big|_{\Sigma}, \\ \Delta \vec{B}_n \Big|_{\Sigma} &= 0, & \Delta \vec{E}_{\parallel} \Big|_{\Sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

**В разделе 3** приведен пример расчета топологического эффекта в спектре атома водорода, расположенного рядом с топологическим изолятором. Отмечается, что присутствие топологического изолятора приводит к возникновению эффективного магнитного поля, действующего на атом. Геометрия задачи представлена на рисунке 3.

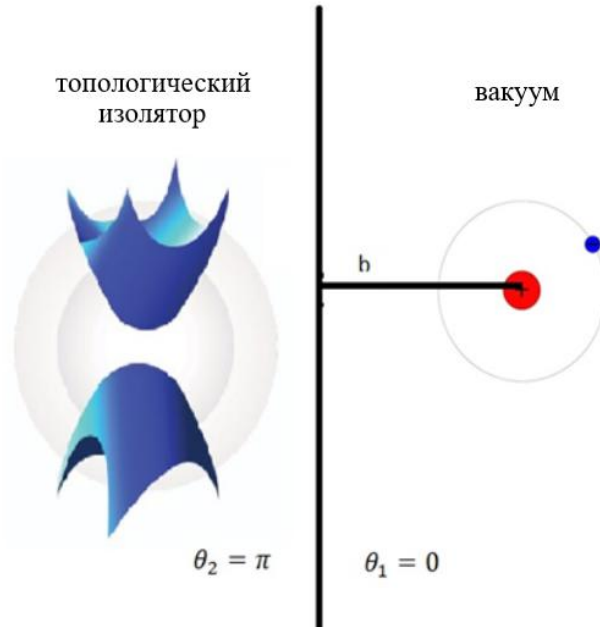


Рисунок 3 - Геометрия задачи. Неподвижное ядро атома (красный кружок) расположен на расстоянии  $b$  от границы раздела вакуум – топологический изолятор.

Для спектра получено выражение

$$E_{\nu, L, m} = -\frac{\mu \tilde{e}^4}{2(\nu + \tilde{l} + 1)^2}, \quad (12)$$

где  $\mu$  - приведённая масса,  $\tilde{e}^2 = \frac{4}{4 + \tilde{\theta}^2} e^2$ ,  $e$  - элементарный заряд;  $\nu$  - характеризует число узлов радиальной функции,  $\tilde{l}$  связан с топологией зон ( $\tilde{l} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2L + 4a + 1)(2L - 4a + 1)}$ ,  $L$  - орбитальное квантовое число,  $a = \frac{\tilde{\theta}}{4 + \tilde{\theta}^2} e^2$ ),  $\tilde{l}$  - модификация орбитального движения из-за топологического эффекта, при  $\tilde{\theta} = 0$   $\tilde{l} = L$ ,  $\tilde{\theta} = \frac{\alpha(\theta_2 - \theta_1)}{\pi}$ , где  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры,  $\theta_2, \theta_1$  значения топологического параметра в различных граничащих друг с другом средах.

Отмечается, что полученный топологический эффект в спектре атома водорода может быть легко детектирован средствами атомной спектроскопии.

**В разделе 4** рассмотрена задача о взаимодействии двух магнитных топологических изоляторов, помещенных в вакуум.

На первом этапе рассчитываются коэффициенты отражения границы раздела топологический изолятор/вакуум. Коэффициенты отражения для границы раздела между изотропной аксионной средой и вакуумом могут быть получены путем решения краевой задачи. Для случая, когда топологический изолятор (вакуум) находится справа (слева) от границы раздела, а падающий луч распространяется вправо, имеем

$$\begin{aligned}
r_{ss} &= \frac{1}{\Delta} \left( 1 - \varepsilon - \bar{\alpha}^2 + \sqrt{\varepsilon} \chi_- \right), \\
r_{ps} &= r_{sp} = \frac{2\bar{\alpha}}{\Delta}, \\
r_{pp} &= \frac{1}{\Delta} \left( -1 + \varepsilon + \bar{\alpha}^2 + \sqrt{\varepsilon} \chi_- \right),
\end{aligned} \tag{13}$$

где  $\bar{\alpha} \equiv \alpha\theta/\pi$ ,  $\theta$  – топологический параметр, равный 0 для тривиального изолятора, и нечетному целому числу, умноженному на  $\pi$  для магнитного топологического изолятора;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость пластины топологического изолятора, и

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1 + \varepsilon + \bar{\alpha}^2 + \sqrt{\varepsilon} \chi_+, \\
\chi_{\pm} &= \frac{\xi^2 + c^2 k_{\perp}^2 \pm \left( \xi^2 + \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\varepsilon} \right)}{\sqrt{\left( \xi^2 + c^2 k_{\perp}^2 \right) \left( \xi^2 + \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\varepsilon} \right)}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $k_{\perp} = |\vec{k}_{\perp}|$ , где  $\vec{k}_{\perp} = (k_x k_y)^T$  – поперечный волновой вектор и  $\xi$  величина мнимой частоты. Для случая, когда топологический изолятор находится слева от границы раздела, а вакуум-справа, и падающий луч распространяется влево, коэффициенты отражения остаются прежними, т.е.  $r'_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}$ .

Если  $r_{ps} = r_{sp}$  (как в случае с топологическими материалами, рассмотренными в этом дипломе), логарифмический член в уравнении (1) принимает вид:

$$\ln \left( 1 - \left( (r_{pp})^2 + 2r'_{ps,1} r_{ps,2} + (r_{ss})^2 \right) e^{-2q_n d} + \left( (r'_{ps,1})^2 - r_{pp} r_{ss} \right) \left( (r_{ps,2})^2 - r_{pp} r_{ss} \right) e^{-4q_n d} \right) \tag{16}$$

т.е. логарифм больше не будет спадать монотонно с уменьшением расстояния (как и в случае систем с симметрией обращения времени, но без смешивания поляризаций). Как впоследствии можно увидеть, монотонность не нарушается, если  $r'_{ps,1}$  и  $r_{ps,2}$  имеют одинаковую величину и один и тот же знак, но может быть нарушена, если они имеют противоположные знаки, что приводит к возможности отталкивания Казимира между одинаковыми пластинами. Можно также увидеть, что изменение знака может быть достигнуто за счет изменения направления поля, что является одним из способов управления знаком силы Казимира.

Далее подробнее посчитаем коэффициенты отражения (4.3). Для диэлектрической проницаемости используем стандартную оценку на основе модели затухающего осциллятора

$$\varepsilon(i\tilde{\xi}c/d) = 1 + \frac{\omega_e^2}{(\tilde{\xi}c/d)^2 + \omega_R^2 + \gamma_R(\tilde{\xi}c/d)}. \quad (17)$$

По мере того, как  $d$  становится меньше, второй член в  $\varepsilon(i\tilde{\xi}c/d)$  начинает уменьшаться, как  $d^2$ , и в пределе  $d \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon(i\tilde{\xi}c/d) \rightarrow 1$  (диэлектрическая прозрачность) и  $\chi_- \approx 0$ . Тогда преобразуя коэффициенты отражения (13), используя (14)-(15), получаем

$$\begin{aligned} r_{ss,i} &= \frac{1}{1 + \varepsilon + \bar{\alpha}_i^2 + \sqrt{\varepsilon}\chi_+} (1 - \varepsilon - \bar{\alpha}_i^2 + \sqrt{\varepsilon}\chi_-) \approx \frac{1 - 1 - \bar{\alpha}_i^2 + \sqrt{1} \cdot 0}{1 + 1 + \bar{\alpha}_i^2 + \sqrt{1}\chi_+} = -\frac{\bar{\alpha}_i^2}{2 + \bar{\alpha}_i^2 + \sqrt{1}\chi_+}, \\ r'_{ps,1} = r'_{sp,1} &= \frac{2\bar{\alpha}_1}{1 + \varepsilon + \bar{\alpha}_1^2 + \sqrt{\varepsilon}\chi_+} \approx \frac{2\bar{\alpha}_1}{2 + \bar{\alpha}_1^2 + \chi_+}, \\ r_{ps,2} = r_{sp,2} &= \frac{2\bar{\alpha}_2}{1 + \varepsilon + \bar{\alpha}_2^2 + \sqrt{\varepsilon}\chi_+} \approx \frac{2\bar{\alpha}_2}{2 + \bar{\alpha}_2^2 + \chi_+}, \\ r_{pp,i} &= \frac{1}{1 + \varepsilon + \bar{\alpha}_i^2 + \sqrt{\varepsilon}\chi_+} (-1 + \varepsilon + \bar{\alpha}_i^2 + \sqrt{\varepsilon}\chi_-) \approx \frac{\bar{\alpha}_i^2}{2 + \bar{\alpha}_i^2 + \chi_+}. \end{aligned} \quad (18)$$

Диагональными коэффициентами отражения  $r_{ss}$  и  $r_{pp}$ , можно пренебречь как эффектом второго порядка малости по топологическому параметру, и тогда (16) принимает вид

$$\begin{aligned} \ln \det(1 - R'_1 \cdot R_2 e^{-2q_n d}) &\approx \ln(1 - 2r'_{ps,1} r_{ps,2} e^{-2q_n d} + (r'_{ps,1})^2 (r_{ps,2})^2 e^{-4q_n d}) = \\ &= \ln(1 - r'_{ps,1} r_{ps,2} e^{-2q_n d})^2 = 2 \ln(1 - r'_{ps,1} r_{ps,2} e^{-2q_n d}). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, если  $\bar{\alpha}_1$  и  $\bar{\alpha}_2$  имеют противоположные знаки, что соответствует аксиальным векторам тока Холла, направленным в одном направлении,  $r'_{ps,1}$  и  $r_{ps,2}$  также будут иметь противоположные знаки, и энергия Казимира-Лифшица увеличивается с уменьшением  $d$  для достаточно малых расстояний, соответственно сила является отталкивающей. Сила Казимира-Лифшица меняет знак, если расстояние между ними больше определенного порогового значения  $d_{eq}$ . Значение  $d_{eq}$  увеличивается с увеличением значения топологического параметра, но становится меньше при больших диэлектрических проницаемостях пластин. Численная оценка для  $\text{TlBiSe}_2$  дает значение  $d_{eq}$  порядка 0.1 микрон.



## ВЫВОДЫ

Отталкивающая сила Казимира возникает в системе двух магнитных топологических изоляторов с противоположными по знаку топологическими параметрами на расстояниях меньших 0.1 микрон. Эффект целиком обусловлен магнитоэлектрическим характером взаимодействующих топологических изоляторов, что математически отражается в определяющем для эффекта характере зависимости недиагональных компонент матрицы отражения от топологического параметра материала (первый порядок по топологическому параметру), в отличие от таковой для диагональных компонент матрицы отражения (второй порядок по топологическому параметру).

## Список использованных источников

1. Casimir physics: Lecture notes in physics. Vol. 834 / Editors: D. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, and F. Rosa. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. – 470 p.
2. Casimir physics: Lecture notes in physics. Vol. 834 / Editors: D. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, and F. Rosa. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. – 470 p.
3. Лифшиц, Е.М. Теория молекулярных сил притяжения между твердыми телами / Е.М. Лифшиц // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1955. – Т. 29, вып. 1. – С. 94-110.
4. Dzyaloshinskii, I.E. The general theory of van der Waals forces / I.E. Dzyaloshinskii, E.M.Lifshitz, and L.P. Pitaevskii // Advances in Physics. – 1961. – Vol. 10, Issue 38. – P. 165-209.
5. Kane, C.L.  $Z_2$  topological order and the quantum spin Hall effect/ C.L. Kane and E.J. Mele // Physical Review Letters. – 2005. – Vol. 95, Issue 14. – Art. No. 146802.
6. Kane, C.L. Quantum spin Hall effect in graphene / C.L. Kane and E.J. Mele // Physical Review Letters. – 2005. – Vol. 95, Issue 22. – Art. No. 226801.
7. Topological insulators: Contemporary concepts of condensed matter science Vol. 6 / Volume editors: M. Franz and L. Molenkamp. – Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Elsevier, 2013. – 352 p.
8. Martín-Ruiz, A. The magnetoelectric coupling in electrodynamics / A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso, and L. F. Urrutia // International Journal of Modern Physics A. – 2019. – Vol. 34, No. 28. – Art. No. 1941002.
9. Bonilla, D.A. Exact solution of the Schrödinger equation for a hydrogen atom at the interface between the vacuum and a topologically insulating surface / D.A. Bonilla, A. Martín-Ruiz, and L.F. Urrutia // The European Physical Journal D. – 2019. – Vol. 73, No. 6. – Art. No. 1941002.
10. Lu, B.-S. The Casimir effect in topological matter / B.-S. Lu // Universe. –2021. – Vol. 7, Issue 7. – Art. No. 237.