МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Интегрируемость и алгебры Ли

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Дружинина Сергея Алексеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________________ А.Н. Сергеев
подпись, дата

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Актуальность темы исследования. Впервые оператор L_2 появился в работах итальянского математика Калоджеро [4], [5] в 70-х годах 20 века, при рассмотрениии взаимодействия конечного числа частиц на прямой по закону обратных квадратов. Его исследование продолжилось в работах Мозера [6] и Сазерленда [7], [8]. В дальнейшем данная задача стала известной как задача Колоджеро-Мозра-Сазерленда или сокращенно задача КМС. Затем М. Ольшанецким и А. Переломовым [9] было дано обобщение этого оператора на произвольную систему корней полупростой алгебры Ли. Оказалось, что операторы такого вида обладают многими замечательными свойствами, наиболее важным из которых является их интегрируемость. То есть оператор L_2 может быть включен в алгебраически независимое семейство попарно коммутирующих дифференциальных операторов $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Основным результатом работы является доказательство интегрируемости оператора L_2. Впервые подробное исследование таких операторов и гипотеза об их интегрируемости была высказана в работах Опдама и Хекмана [12], [13], [14], [15]. Принципиально новый шаг в теории этих операторов был сделан Ч. Данклом в 1989 году, где он ввел операторы носящие его имя [11]. Открытие этих операторов позволило не только существенно упростить доказательство основных свойств этих операторов, но и дать начало новым направлениям в теории этих операторов.

Современные исследования задачи КМС и их связь с оператором Данкла на бесконечности широко представлены в работах А. Н. Сергеева в соавторстве с А. П. Веселовым [16], [17], [18], [19].

2. Целью данной работы является исследование интегрируемости дифференциального оператора L_2 и нахождение операторов, коммутирующих с L_2:

$$L_2 = \partial^2 - \frac{k(k+1)}{x^2}.$$

Для достижения цели ставим и решаем следующие задачи.

1. изучить основные положения алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.
2. изучить основные положения теории представлений.
3. исследовать интегрируемость оператора L_2.

Содержание работы. В работе приводятся необходимые сведения из общей теории а также исследуется интегрируемость оператора L_2 в случае одной переменных (общий случай можно свести к этому) методами теории алгебр Ли. Для этого проверяется коммутационные соотношения алгебры Ли $sl(2)$ между некоторыми операторами (включая L_2). Затем теория представлений этой алгебры используется для доказательства интегрируемости.

Структура работы следующая. В первой главе объясняется что такое симметрические многочлены. Во второй главе излагается введение в проблему интегрируемости операторов на примере задачи классической механики. В третьей главе представлены некоторые сведения из линейной алгебры. В четвертой главе приведены основные сведения из теории Алгебры Ли и её представлений. Пятая глава посвящена краткому обзору методов исследований интегрируемости, в смысле Лиувилля.Шестая глава посвящена постоению интегралов с помощью операторов Данкла. Седьмая глава содержит самостоятельную часть работы, доказанны ряд лемм со вспомогательными формулами и финальная теорема, доказывающая интегрируемость оператора L_2. Данная теорема ранее была известна, здесь рассматривается новое доказательство с использованием теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Методы исследования

Апробации работы Основные результаты работы были доложены на семинаре кафедры геометрии Саратовского государственного университета.

Основное содержание работы

1 Симметрические многочлены

Определение 1.1. *Многочлен* $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *называется симметрическим, если он не изменяется ни при каких перестановках переменных [1] [2].*

Так как любая перестановка может быть осуществлена путем последовательных перестановок двух элементов, то многочлен является симметрическим, если он не изменяется при перестановке любых двух переменных.

Очевидно, что каждая однородная компонента симметрического многочлена также является симметрическим многочленом.

Теорема 1.2. . *Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.*

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 1.3. *Пусть* $u = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ *– старший член симметрического многочлена f. Тогда*

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n. \tag{1}$$

Доказательство. Предположим, что $k_i < k_{i+1}$ для некоторого i. Наряду с членом u многочлен f должен содержать член

$$u' = ax_1^{k_1}\ldots x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}\ldots x_n^{k_n},$$

получающийся из u перестановкой x_i и x_{i+1}. Легко видеть, что $u' \succ u$. Это противоречит тому, что u — старший член многочлена f. □

Лемма 1.4. *Для любого одночлена* $u = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$*, показатели которого удовлетворяют неравенствам (1.2), существуют такие неотрицательные целые числа* $l_1, l_2, \ldots, l_n$*, что старший член многочлена* $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\ldots\sigma_n^{l_n}$ *совпадает с* u*. Числа* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *определены этим условием однозначно.*

Доказательство. Старший член многочлена σ_k равен $x_1x_2\ldots x_k$. Старший член многочлена $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\ldots\sigma_n^{l_n}$ равен

$$x_1^{l_1}(x_1x_2)^{l_2}\ldots(x_1x_2\ldots x_n)_n^l = x_1^{l_1+l_2+\ldots+l_n}x_2^{l_2+\ldots+l_n}\ldots x_n^{l_n}.$$

Приравнивая его одночлену u, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + \ldots + l_n = k_1, \\ \qquad l_2 + \ldots + l_n = k_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad l_n = k_n, \end{cases}$$

которая, очевидно, имеет единственное решение

$$l_i = k_i - k_{i+1} (i = 1, 2, \ldots, n-1), l_n = k_n. \tag{2}$$

Из условия леммы следует, что определенные таким образом числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$ неотрицательны. □

Замечание 1.5. *Уравнение $l_1 + l_2 + \cdots + l_n = k_1$ показывает, что степень одночлена $X_1^{l_1} X_2^{l_2} \ldots X_n^{l_n}$ по совокупности переменных равна степени одночлена u по x_1.*

Доказательство. Пусть $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ – симметрический многочлен. Нам нужно найти такой многочлен $F \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, что

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = f.$$

Если $f = 0$, то можно взять $F = 0$. В противном случае пусть $u_1 = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ – старший член многочлена f . По лемме 1 выполняются неравенства (1.2). По лемме 2 существует такой одночлен $F_1 \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, что старший член многочлена $F_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ равен u_1. Рассмотрим симметрический многочлен

$$f_1 = f - F_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Если $f_1 = 0$, то можно взять $F = F_1$. В противном случае пусть u_2 – старший член многочлена f_1. Ясно, что он младше, чем u_1. Существует такой одночлен $F_2 \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, что старший член многочлена $F_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ равен u_2. Рассмотрим симметрический многочлен

$$f_2 = f_1 - F2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Если $f_2 = 0$, то можно взять $F = F_1 + F_2$. В противном случае, продолжая процесс, получаем последовательность симметрических многочленов $f, f_1, f_2, \ldots$, старшие члены которых удовлетворяют неравенствам

$$u_1 \succ u_2 \succ \ldots$$

По лемме 1 показатель при любой переменной в любом из одночленов u_m не превосходит показателя при x_1 в этом одночлене, а он не превосходит k_1. Поэтому для наборов показателей одночленов u_m имеется лишь конечное число возможностей, так что описанный выше процесс должен оборваться. Это означает, что $f_M = 0$ для некоторого M. В качестве F можно тогда взять $F_1 + F_2 + \ldots + F_M$.

Докажем теперь, что многочлен F определен однозначно. Предположим, что F и G – такие многочлены, что

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = G(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Рассмотрим их разность H = F - G. Тогда

$$H(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0.$$

Нам нужно доказать, что H = 0. Предположим, что это не так, и пусть $H_1, H_2, \ldots, H_s$ – все ненулевые члены многочлена H. Обозначим через w_i старший член многочлена

$$H_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

В силу леммы 2 среди одночленов $w_1, w_2, \ldots, w_s$ нет пропорциональных. Выберем из них старший. Пусть это будет w_1. По построению одночлен w_1 старше всех остальных членов многочлена $H_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ и всех членов многочленов $H_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)(i = 2, \ldots, s)$. Поэтому после приведения подобных членов в сумме

$$H_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) + H_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) + \ldots + H_s(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) =$$
$$= H(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

член w_1 сохранится, так что эта сумма не будет равна нулю, что противоречит нашему предположению. □

Замечание 1.6. *Согласно замечанию 1, для любого m*

$$degF_m = deg_{x_1}u_m \leq deg_{x_1}u_1 = deg_{x_1}f(= k_1).$$

Следовательно,

$$degF = deg_{x_1}f. \tag{3}$$

Следуя доказательству этой теоремы, можно в принципе найти выражение любого конкретного симметрического многочлена через $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

Замечание 1.7. *Изложенная теория без всяких изменений переносится на более общий случай, когда* K *–– произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Так, в случае* $K = Z$ *получается следующий результат: всякий симметрический многочлен с целыми коэффициентами представляется в виде многочлена с целыми коэффициентами от элементарных симметрических многочленов. Доказанная теорема в сочетании с формулами Виета позволяет найти любой симметрический многочлен от корней заданного алгебраического уравнения. А именно, пусть* $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *– симметрический многочлен и* $F \in K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ *– такой многочлен, что*

$$f = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Пусть, далее, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *– корни алгебраического уравнения*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0(a_0 \neq 0).$$

Тогда

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_n) = F(-\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, (-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \tag{4}$$

Замечание 1.8. *Пусть* $deg_{x_1}f = k$. *Тогда* $degF = k$ *и домножив равенство (1.6) на* a_0^k, *мы получим в правой части однородный многочлен степени* k *от* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

2 Линейная алгебра

Определение 2.1. *Обобщенным собственным подпространством оператора A отвечающему собственному значению λ называется подпространство*

$$V^\lambda = \{v \in V \mid \ (A-\lambda)^k v = 0\}$$

для некоторого k.

Определение 2.2. *Пусть V_1, V_2 произвольные векторные пространства. Прямой сумой V_1 и V_2 называется векторное пространство $V = V_1 \oplus V_2$ такое, что $\forall v \in V$ существует единственная пара векторов $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$, т.ч. $v = v_1 + v_2$.*

Теорема 2.3. *Пусть V конечномерное пространство и A - линейный оператор в нем. Тода пространство можно представить в виде прямой суммы обобщенных собственных подпространств.*

Определение 2.4. *Говорят, что диаграмма коммутативна если композиция отображений по любому направлению зависит только от начальной и конечной точки, т.е. для диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

это означает, что $h \circ f = k \circ g$

Лемма 2.5. *Пусть $\varphi : V \to U$ сюръективный гомоморфизм, а A и B такие операторы в V и U, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \downarrow A & & \downarrow B \\ V & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

Тогда для любого λ

$$\varphi(V^\lambda) = U^\lambda$$

Лемма 2.6. *Пусть линейный оператор A удовлетворяет уравнению*

$$(A-a_1)(A-a_2)\dots(A-a_n) = 0$$

в векторном пространстве V*, где все* $a_1, \ldots, a_n$ *попарно различны. Тогда существует базис в* V *состоящий из собственных векторов оператора* A*. Другими словами оператор* A *диагонализируем.*

3 Алгебры Ли

Приведем некоторые сведения из теории алгебры Ли.

Определение 3.1 (Алгебра Ли)**.** *Рассмотрим операцию* $[x, y] = xy - yx$*. Векторное пространство* L *над полем* $\boldsymbol{F}$ *с операцией* $L \times L \to L$*, обозначаемой* $(x, y) \mapsto [x, y]$ *и называемой скобкой или коммутатором элементов* x *и* y*, называется алгеброй Ли над полем* $\boldsymbol{F}$*, если выполняются следующие аксиомы:*

1. *операция коммутирования билинейна;*
2. $[x, x] = 0 \ \forall x \in L$*;*
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ (x, y, z \in L)$

Последняя аксиома называется тождеством Якоби.

Предложение 3.2. *Пусть* L *ассоциативная алгебра Ли и* $A, B, C \in L$*. Тогда:*

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}[AB, C] = (AB)C - C(AB) = A(BC) - A(CB) + A(CB) - C(AB) = \\ = A[B, C] + (AC)B - (CA)B = A[B, C] + [A, C]B \\ [A, BC] = -[BC, A] = -B[C, A] - [B, A]C = B[A, C] + [A, B]C\end{gathered}$$

□

Определение 3.3. *Линейное отображение*

$$f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$$

Называется гомоморфизмом, если оно является линейным отображением векторных пространств и сохраняет скобку, то есть

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

Определение 3.4. *Гомоморфизм называется изоморфизмом, если он является взаимно однозначным отображением.*

Определение 3.5 (Изоморфизм алгебр Ли)**.** *Пусть дано две алгебры Ли L и L' над полем $\boldsymbol{F}$. Будем говорить, что L и L' изоморфны, если существует изоморфизм векторных пространств $\varphi : L \to L'$.*

Определение 3.6 (Подалгебра алгебры Ли)**.** *Подпространство P пространства L называется подалгеброй, если для любых $x, y \in P$ $[x, y] \in P$. В этом случае P самоя является алгеброй Ли.*

4 Традиционные методы исследования. Метод пар Лакса

В этом разделе представит один из классических методов построения интегрируемой системы. Метод изоспектральной деформации, также известный как метод обратной задачи рассеяния или метод пар Лакса, является методом изучения интегрируемых динамических систем. Данный метод впервые был применен к изучению уравнения Кортевега-де Фриза в работе П. Лакса [20]

$$u_t = u_{xxx} + uu_x = 0, \;\; u = u(x,t), \;\; u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \;\; u_t = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Идея метода пар Лакса следующая. Пусть динамическая система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = F_i(x).$$

Предположим, что удалось найти пару матриц L и M, элементы которых зависят от динамических переменных x_i так, что при этом выше эквивалентно уравнению

$$\dot{L} = [M, L].$$

Из данного уравнения следует, что матрица L в процессе эволюции подвергается преобразованию подобия. Из этого следует, что собственные матрицы L от времени не зависит. Таким образом, собственные значения матрицы L являются интегралами движения. Если получится обнаружить достаточно много функционально независимых интегралов движения и показать, что коммутатор любых двух интегралов равен нулю, то рассматриваемая система будет вполне интегрируемой.

Следующая теорема дает нам метод построения такой системы.

Теорема 4.1. *Пусть A некоторая алгебра и $a \in A$. Обозначим через E единичную матрицу размера $n \times n$, и L, M такие матрицы размера $n \times n$ с элементами из A, что*

$$[L, aE] = [L, M].$$

Пусть e^*, e такие матрицы с элементами из A размеров $1 \times n$ и $n \times 1$ соответственно, что

$$e^*M = Me = 0, \;\; e^*a = ae^*, \;\; ea = ae.$$

Тогда элементы

$$L_r = e^* L^r e$$

коммутируют с элементом a.

5 Построение интегралов. Операторы Данкла

Существует еще один способ построения интегралов. Для его описания удобно перейти к радиальной форме оператора КМС, сделав сопряжение на функцию. Введем обозначение

$$\delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^k$$

.

Теорема 5.1. Справедливо равенство

$$\delta L_2 \delta^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i<j} \frac{2k}{x_i - x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

Обозначим полученный оператор через $\mathcal{L}_2$.

Определение 5.2. Многочлен называется симметрическим , если он не меняется при любых перестановках переменных.

Заметим без доказательства, что оператор $\mathcal{L}_2$ сохраняет пространство симметрических многочленов .

Определение 5.3. Операторы

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + k \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} (\sigma_{ij} - 1), \ldots i = 1, 2, \ldots, n$$

называются операторами Данкла.

$$\delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^k$$

.

Лемма 5.4. Операторы Данкла сохраняют пространство многочленов .

Лемма 5.5. Операторы Данкла сохраняют пространство многочленов.

Теорема 5.6. Операторы Данкла обладают следующими свойствами

1. $\sigma D_i = D_{\sigma(i)}\sigma$
2. $D_i D_j = D_j D_i$

Лемма 5.7. При ограничении на пространство симметрических многочленов выполнено равенство

$$\mathcal{L}_2 = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2$$

Лемма 5.8. Ограничение на симметрические функции D_i^p совпадает с $\partial_i^{(p)}$.

Следствие 5.9. Ограничение

$$D_1^p + \cdots + D_n^p$$

на симметрические многогчены совпадает с

$$\partial_1^{(p)} + \cdots + \partial^{(p)}_n$$

Таким образом, оператор Данкла позволяет построить интегралы общего вида, что показывает следующая теорема.

Теорема 5.10. Для любого симметрического многочлена f оператор $\mathcal{L}_f = f(D_1, \ldots, D_n)$ сохраняет пространство симметрических многочленов и коммутирует с $\mathcal{L}_2$. Отображение $f \to \mathcal{L}_f$ является изоморфизмом алгебры симметрических функций на алгебру дифференциальных операторов коммутирующих с $\mathcal{L}_2$ при общем знечении параметра k.

6 Исследование интегрируемости оператора Колоджеро-Мозера-Сазерлэнда

Данный раздел просвещен доказательству интегрируемости оператора L_2. Рассмотрим алгебру многочленов $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ и оператор $\partial \in \operatorname{Der}\mathbb{C}[x, x^{-1}]$, где $\operatorname{Der}\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ – алгебра дифференцирований. В рассматриваемом случае оператор ∂ совпадает с обычным дифференцированием по x:

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Определение 6.1 (Оператор Колоджеро-Мозера-Сазерлэнда)**.** *Оператором Колоджеро-Мозера-Сазерлэнда называют оператор вида*

$$L_2 = \partial^2 - \frac{k(k+1)}{x^2}$$

Замечание 6.2. *Под интегрируемости оператора будем понимать то, что существует некоторый другой нетривиальный оператор, который коммутирует с данным.*

Рассмотрим подалгебру $\mathbb{C}[\partial, x, x^{-1}]$ алгебры линейных преобразований алгебры $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$.

Замечание 6.3. *Элемент $x \in \mathbb{C}[\partial, x, x^{-1}]$ является линейным оператором умножения на x. Поэтому оператор $\partial x \in \mathbb{C}[\partial, x, x^{-1}]$ действует следующим образом:*

$$\partial x = \partial(x) + x\partial = 1 + x\partial$$

Предложение 6.4. *Пусть $f \in \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Тогда: $[\partial, f] = \frac{\partial f}{\partial x}$*

Определение 6.5. *Введем следующие операторы из алгебры $\mathbb{C}[\partial, x, x^{-1}]$*

$$X = \frac{1}{2}x^2,\ Y = -\frac{1}{2}(\partial^2 - \frac{k(k+1)}{x^2}),\ \ H = x\partial + \frac{1}{2}$$

Лемма 6.6. *Операторы X, Y, H, удовлетворяют соотношениям алгебры $\mathfrak{sl}(2)$*

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y$$

Предложение 6.7. $[\partial^i, x] = i\partial^{i-1}$

Лемма 6.8. *Пусть*

$$D = \sum_{i \geq 0} f_i \partial^i$$

дифференциальный оператор коэффициенты которого f_i являются многочленами от x, x^{-1}. Тогда из равенства $[X, D] = 0$ следует, что $D = f_0$, то есть оператор является умножением на многочлен.

Предложение 6.9. *Определим оператор ad_Y по формуле $ad_Y(f) = [Y, f]$. Тогда справедливо следующее равенство*

$$ad_Y^r(fg) = \sum_{i=0}^{r} C_r^i ad_Y^{r-i}(f) ad_Y^i(g)$$

Лемма 6.10. *Справедливы следующие равенства*

$$ad_Y^{2m+2}(x^{2m+1}) = (2m+1)^2(2m-1)^2 \dots 1^2$$

$$(k+m+1)(m-k)(k+m)(m-1-k) \dots (k+1)(-k)x^{-2m-3}$$

где $m \geq 0$.

Мы выяснили, чему равно $ad_Y^{M+1}(x^M)$ для нечетного M. Теперь нужно посчитать, что будет для четного.

Лемма 6.11. *Для $m \geq 0$ справедливо равенство $ad_Y^{2m+1}(x^{2m}) = 0$.*

Лемма 6.12. *Пусть D- дифференциальный оператор порядка n. Тогда для любых функций $f_0, \dots, f_n$ справедливо равенство*

$$[\dots[D, f_0], f_1], \dots, f_n] = 0. \tag{5}$$

Теорема 6.13. *Пусть $L_2 = \partial^2 - \frac{k(k+1)}{x^2}$, тогда в алгебре $\mathbb{C}[x.x^{-1}, \partial]$ существует дифференциальный оператор коммутирующий с L_2 и отличный от L_2^N, $N = 1, 2, \dots$, если и только если k - целое.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена теория алгебры Ли, в частности алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Представлены основные теоремы теории представлений алгебры Ли. Представлен один из классических методов исследования интегрируемости, в смысле Лиувилля, гамильтоновой системы – метод пар Лакса. Приведенно новое доказательство, опирающиеся на теорию представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, интегрируемости оператора L_2 Колоджеро-Мозера-Сазерленда. В результате полученна явная формула для построения системы коммутирующих операторов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Хамфрис, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений/Дж. Хамфрис. – М. : МЦНМО, 2003. - 212 с.

2 Винберг, Э.Б. Курс Алгебры/ Э.Б. Винберг. – М. : МЦНМО, 2011. - 592 с.

3 Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли/ Н. Бурбаки – М. : МИР, 1976. - 495 с.

4 Etingof, P. Calogero-Moser systems and representation theory. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics)/ Etingof P. – EMS., 2007.- 74 с.

5 Calogero, F. Solution of the one dimensional Nobody problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials/ F.Calogero //Journal of Mathematical Physics. – 1971. – Т. 12. – №. 3.- 419-436с.

6 Moser, J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations/ J. Moser.//Surveys in applied mathematics. – Academic Press, 1976. – 235-258с.

7 Sutherland, B. Exact results for a quantum many-body problem in one dimension/ B. Sutherland.//Physical Review A.–1971.– Т.4.–№. 5.– 2019 с.

8 Sutherland, B. Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. II/ B. Sutherland //Physical Review A.–1972.– Т. 5.–№. 3. – 1372 с.

9 Olshanetsky, M. A. Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras /M. A.Olshanetsky.,A. M. Perelomov, –//Inventiones mathematicae. – 1976. – Т. 37. – №. 2.– 93-108с.

10 Olshanetsky, M. A. Quantum integrable systems related to Lie algebras /M. A.Olshanetsky.,A. M. Perelomov //Physics Reports. – 1983. – Т. 94. – №. 6.–313-404 с.

11 Dunkl, C. F. Differential-difference operators associated to reflection groups / F.C.Dunk //Transactions of the American Mathematical Society. – 1989. – Т. 311. – №. 1. – 167-183с.

12 Heckman, G. J., Opdam E. M. Root systems and hypergeometric functions. I /G. J. Heckman //Compositio Mathematica. – 1987. – T. 64. – №. 3. – 329-352c.

13 Heckman, G. J. Root systems and hypergeometric functions. II /G. J. Heckman //Compositio mathematica. – 1987. – T. 64. – №. 3. – 353-373c.

14 Heckman, G. J. An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam /G. J. Heckman //Inventiones mathematicae. – 1991. – T. 103. – №. 1. – 341-350 c.

15 Heckman, G. J. A Remark on the Dunkl Differential—Difference Operators /Heckman G. J.//Harmonic analysis on reductive groups. – Birkhuser, Boston, MA, 1991. – 181-191c.

16 Sergeev, A. N. Quantum Calogero–Moser systems: a view from infinity / A. N. Sergeev, A. P. Veselov //XVIth International Congress on Mathematical Physics, World Sci. Publ., Hackensack, NJ. – 2010. – 333-337c.

17 Sergeev, A. N. Calogero-Moser operators in infinite dimension / A. N. Sergeev, A. P. Veselov //arXiv preprint arXiv:0910.1984. – 2009.

18 Sergeev, A. N. Deformed quantum Calogero-Moser problems and Lie superalgebras /A. P.Veselov, A. N.Sergeev //Communications in mathematical physics. – 2004. – T. 245. – №. 2. – C. 249-278.

19 Sergeev, A. N. Generalised discriminants, deformed Calogero–Moser–Sutherland operators and super-Jack polynomials /A. P.Veselov, A. N.Sergeev //Advances in Mathematics. – 2005. – T. 192. – №. 2. – C. 341-375.

20 Lax, P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P. D.Lax //Communications on pure and applied mathematics.– 1968. – T. 21. – №. 5. – 467-490 c.