МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА ХАРДИ И ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета
Халили Романа Алексеевича

Научный руководитель
профессор, д. ф.-м. н., профессор ______________ Ф. А. Шамоян

Заведующий кафедрой
и.о.зав.кафедрой, к. ф.-м. н., доцент ______________ Е. В. Разумовская

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы магистерской работы.

Хорошо известно, что теория преобразования Фурье занимает особое место не только в комплексном и функциональном анализе, но и их многочисленных приложениях в прикладной математике, а также в теоретической и математической физике.

Поэтому, можно сказать, что тематика магистерской работы является весьма актуальной.

Целью магистерской работы являлось получение аналога теоремы Хилле-Тамаркина в случае L^p_ω весовых пространств.

Краткая характеристика и содержание работы.

Магистерская работа состоит из введения, 3-х разделов, заключения, списка использованных источников, состоящего из 20 наименований, и 2-х приложений.

Первый раздел имеет 4 основных параграфа и носит вспомогательный характер. В нём изложены основные определения и теоремы из теории преобразования Фурье.

Основное исследование изложено во втором разделе данной работы. Он состоит из 3-х параграфов. Собственное исследование предоставлено в 3 параграфе. В нём доказана основная теорема работы.

В третьем разделе описаны возможности практического применения преобразования Фурье для передачи сигналов. Он состоит из 2-х параграфов. В 1 параграфе описаны возможности применения преобразования Фурье для удаления шумов из аудиосигнала. Во 2 параграфе описаны возможности применения преобразования Фурье для нахождения границ на изображении.

В приложениях предоставлены программные коды, реализующие идеи из третьего раздела.

Общий объём работы составляет 53 страницы, включая приложения.

Методы исследования.

В работе применяются общие методы комплексного и гармонического анализа.

Апробация.

По результатам исследования был сделан доклад на семинаре кафедры.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении вводятся следующие обозначения необходимые для изложения результатов.

Пусть $\mathbb{C}_+ = \{z = x + iy, y > 0\}$ - верхняя полуплоскость, $H(\mathbb{C}_+)$ - множество всех аналитических функций в $\mathbb{C}_+$, $h(\mathbb{C}_+)$ - множество всех гармонических функций в $\mathbb{C}_+$.

Обозначим через $N(\mathbb{C}_+)$ - класс Р. Неванлинны в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, т.е. $f \in N(\mathbb{C}_+) \Leftrightarrow f(z) = \frac{\Psi(z)}{S(z)}$, $z \in \mathbb{C}_+$, $\Psi, S \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $S(z) \neq 0$, где $H^\infty(\mathbb{C}_+) = H(\mathbb{C}_+) \cap L^\infty(\mathbb{C}_+)$ - класс ограниченных аналитических функций в $\mathbb{C}_+$, или $\Leftrightarrow$ существует $U \in h(\mathbb{C}_+)$, $U(z) \geqslant 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, $\ln|f(z)| \leqslant U(z)$.

L^p пространством для $1 \leqslant p < \infty$ называется множество измеримых функций, таких, что их p-я степень интегрируема, т.е.

$$\int_R |f(x)|^p dx < \infty,$$

и вводится норма

$$||f||_p = \left(\int_R |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Классом Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ называется следующий класс функций:

$$H^p(\mathbb{C}_+) = H^p = \{f \in H(\mathbb{C}_+) : \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx < +\infty\}, \quad 0 < p \leqslant +\infty.$$

Раздел 1. Предварительные сведения из теории преобразования Фурье.

§ 1.1. Преобразование Фурье суммируемых функций.

Пусть функция $f(x)$ с периодом $2\pi l$ представима своим рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\frac{kx}{l}},$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi l}\int\limits_{-\pi l}^{\pi l} f(t)e^{-i\frac{kt}{l}}dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

Обозначим

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itu}dt, \tag{2}$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)e^{ixu}du. \tag{3}$$

Функция $\hat{f}(u)$, определённая интегралом (2), называется преобразование Фурье функции $f(x)$. Двойственная с (2) формула (3) называется обращением преобразования Фурье или обратным преобразованием Фурье.

Простейшим классом функций, для которого вводится преобразование Фурье, является $L^1(\mathbb{R}) = L^1$. Для любой функции $f(x) \in L^1$ её преобразование Фурье

$$F_f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itu}dt$$

существует для всех вещественных значений u.

§ 1.2. Преобразование Фурье в L^2, теорема Планшереля.

Для произвольной функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ интеграл Фурье $\mathcal{F}[f]$ в смысле Лебега, вообще говоря, не существует.

Планшерель впервые построил оператор Фурье $\mathcal{F}[f]$ для класса L^2, доказав следующую замечательную теорему, устанавливающую при этом полное равноправие между функцией и её преобразованием Фурье.

Теорема Планшереля. Пусть $f(x)$ - произвольная функция из класса $L^2(\mathbb{R})$.

Тогда:

1. Формула

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{du} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{-iut} - 1}{-it} dt \tag{4}$$

почти всюду на всей оси $\mathbb{R}$ определяет функцию
$F(u) \equiv \mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R})$. Двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u) \frac{e^{ixu} - 1}{iu} du \tag{5}$$

также справедлива почти всюду.
Кроме того, для пары функций $f(x)$ и $F(u) = \mathcal{F}[f]$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2 du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{6}$$

2. Преобразование Фурье $F(u) = \mathcal{F}[f]$ и его обращение $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F]$, задаваемые соответственно формулами (4) и (5), могут быть определены также предельными соотношениями

$$F(u) = \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} f(t) e^{-iut} dt, \tag{7}$$

$$f(x) = \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(u) e^{ixu} du. \tag{8}$$

3. Если $g(x)$ - произвольная функция из класса $L^2(\mathbb{R})$ и

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{du} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{e^{-iut} - 1}{-it} dt, \tag{9}$$

то для пары функций $f(x)$ и $g(x)$ и их преобразований $F(u)$ и $G(u)$ имеет место обобщённое равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\overline{G(u)}du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{10}$$

Теорема Хаусдорфа-Юнга. Пусть $1 < p \leqslant 2$, $1/p + 1/q = 1$. Тогда если $f \in L^p(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R})$ и $||\hat{f}||_q \leqslant C_p||f||_p$.

§ 1.3. Классы Харди в верхней полуплоскости.

Определение 1.3.1. Говорят, что функция F, аналитическая в $\mathbb{C}_+$, принадлежит пространству $H^p(\mathbb{C}_+)$ (или просто H^p, когда известно что речь идет о верхней полуплоскости), если существует константа C, $C < \infty$, такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p dx \leqslant C$$

при всех $y > 0$.

Теорема 1.3.9. Пусть $F \in H^p(\mathbb{C}_+)$. Тогда при $z \in \mathbb{C}_+$

$$F(z) = e^{i\gamma} I_F(z) \cdot Q_F(z);$$

здесь:

1. γ - вещественное число;
2. I_F - внутренний множитель функции F, равный

$$I_F(z) = B(z) \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{i}{z-t} + \frac{it}{t^2+1}\right)d\sigma(t)\right)e^{i\alpha z};$$

в этой формуле

a) B - произведение Бляшке в $\mathbb{C}_+$,

$$B(z) = \prod_k \left(e^{i\alpha_k} \cdot \frac{z - z_k}{z - \overline{z}_k}\right),$$

где z_k - нули функции F в $\mathbb{C}_+$, а вещественные числа α_k выбраны так, чтобы

$$e^{i\alpha_k} \cdot \frac{z - z_k}{z - \overline{z}_k} \geqslant 0;$$

$b)$ $\sigma \leqslant 0$ - некоторая сингулярная мера на $\mathbb{R}$, для которой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\sigma(t)|}{1+t^2} < \infty;$$

$c)$ $\alpha \geqslant 0$ («масса в точке ∞» равна $-\alpha$);

3. Q_F - внешний множитель функции F, равный

$$Q_F(z) = \exp\left(\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{t^2+1}\right)\log|F(t)|dt\right).$$

§ 1.4. Класс Харди H^2 в верхней полуплоскости и теорема Пэли-Винера.

Теорема Пэли-Винера. Комплексозначная функция $f(z)$ принадлежит классу H^2 тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{itz}dt,$$

для некоторых $\hat{f} \in L^2$, где $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}_+$. Это представление единственно.

Имеется аналог теоремы Пэли-Винера и для $1 \leqslant p \leqslant 2$.

А именно справедливо следующее: Пусть $f \in H^p (1 \leqslant p \leqslant 2)$, тогда $\hat{f} \in L^q$ (здесь и везде далее $1 \leqslant q < +\infty$), где $1/p + 1/q = 1$, при этом $\hat{f}(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R}\_$, и справедлива следующая оценка

$$||\hat{f}||_{L^q} \leqslant C_p||f||_{H^p}.$$

Пространство $H^2(\mathbb{C}_+)$ совпадает с классом функций, представимых в виде

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \hat{f}(t) e^{itz} dt, \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{11}$$

где $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{x : x \geqslant 0\}$.

Из теоремы Хаусдорфа-Юнга вытекает следующее: Если $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то функция (11) принадлежит $H^q(\mathbb{C}_+)$, где $1/p + 1/q = 1$, и справедлива следующая оценка

$$||f||_q \leqslant C_p ||\hat{f}||_p.$$

Раздел 2. Преобразование Фурье в L^p и классы Харди H^p в верхней полуплоскости.

Хорошо известно, если $f \in L^p$ при $p > 2$, то как доказал Титчмарш, $\lim\limits_{R \to +\infty} \hat{f}_R$ может не существовать ни в каком L^q, $q \geqslant 1$.

§ 2.1. Теорема Хилле-Тамаркина и класс Харди.

Поэтому Хилле и Тамаркин ввели понятие q - преобразования Фурье.

Определение 2.1.1. Пусть $f \in L^p$, $1 \leqslant p < +\infty$, тогда

$$\hat{f}_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R}^{R} f(t) e^{-itx} dt.$$

Скажем, что $\hat{f}_q$ является q - преобразованием Фурье функции $f \in L^p$, если $\hat{f}_R(x)$ сходится в L^q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, к функции $\hat{f}_q(x)$, при $R \to \infty$, т.е.

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_q(x) - \hat{f}_R(x)|^q dx = 0,$$

и $\hat{f}_q(x)$ называется q - преобразованием Фурье в L^q для функции $f(x)$.

И одновременно доказали следующую теорему:

Теорема Хилле-Тамаркина. Если $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ и существует q - преобразование Фурье для функции f, то оно равно нулю почти всюду при $x < 0$.

§ 2.2. Класс Неванлинны.

Хорошо известно следующее утверждение:

Теорема 2.2.1. Если $f \in H^1(\mathbb{C}_+)$, то $\hat{f}(x) = 0$, $x \in R_- = \{x : x < 0\}$.

Таким образом справедливо следующее утверждение:

Если $f \in H(\mathbb{C}_+)$, при этом выполняется оценка

$$|f(x+iy)|^p \leqslant U(x,y), \quad x+iy \in \mathbb{C}_+, \tag{12}$$

где U - неотрицательная гармоническая функция в $\mathbb{C}_+$, для некоторого p, $0 < p < +\infty$, и $f(x) = \lim\limits_{y \to 0} f(x+iy)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит $L^1(\mathbb{R})$, то по теореме В.И. Смирнова $f \in H^1(\mathbb{C}_+)$, поэтому по теореме 2.2.1: $\hat{f}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_-$, где $\mathbb{R}_- = \{x : x < 0\}$.

Естественно возникает вопрос верно ли аналогичное утверждение если в неравенстве (12), вместо $|f(z)|^p$ - положить $\ln^+ |f(z)|$, $z \in \mathbb{C}_+$?

Можно построить пример функции $f \in N(\mathbb{C}_+)$, $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, в тоже время $\hat{f}(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+ = \{x : x \geqslant 0\}$.

Тем не менее справедливо следующее утверждение:

Пусть $\lambda(x)$ - монотонно растущая, непрерывная, положительная функция на $\mathbb{R}_+$, причём

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\lambda(x)} = 0, \qquad n = 1, 2, ...$$

такая функция называется быстро растущим весом.

Введём:

$$m_n = \sup_{x \in R_+} \frac{x^n}{\lambda(x)}, \qquad T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n}, \qquad r \geq 0.$$

Теорема 2.2.2. Пусть $\lambda(x)$ - быстро растущий вес на $\mathbb{R}_+$, $f \in N(\mathbb{C}_+)$, граничные значения на R принадлежат $L^1(\mathbb{R})$, т.е $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, причём

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty, \tag{13}$$

и

$$|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{\lambda(-x)}, \quad x \in \mathbb{R}_-. \tag{14}$$

Тогда если

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{\ln|f(iy)|}{y} \leq 0, \tag{15}$$

то $\hat{f}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\_$, при этом $f \in H^1(\mathbb{C}_+)$.

Обратно, если интеграл (13) сходится, или не выполняется условие (14), то можно построить функцию $f \in N(\mathbb{C}_+)$, $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, такую, что $\hat{f}(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}\_$.

§ 2.3. Аналог теоремы Хилле-Тамаркина.

Определение 2.3.1 Пусть ω - непрерывная положительная функция на действительной оси R, причём ω невозрастающая функция. Такую функцию назовём весовой.

Определение 2.3.2 Весовым пространством Лебега L^p_ω, где $1 \leqslant p < \infty$ и ω - весовая функция, назовем множество таких измеримых функций, для которых

$$||f||_{p,\omega} = \left(\int\limits_R |f(x)|^p \omega(x) dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Теорема 2.3.3. Пусть $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, причём $1 \leqslant p < \infty$, и выполняется оценка

$$|f(z)| \leqslant \frac{e}{|z|^{\frac{\alpha}{p}}}, \quad |z| \geqslant 1, \;\; \alpha > p, \tag{16}$$

при некотором положительном c, и предположим, что

$$\hat{f}_R(x) = \int\limits_{-R}^{R} f(t)e^{-itx}dt, \quad R > 0,$$

в весовом L^q_ω пространстве сходится к некоторой функции $\hat{f}_q(x)$, тогда $\hat{f}_q(x) = 0$ почти всюду, для всех $x < 0$.

Раздел 3. Практическое применение преобразования Фурье.

§ 3.1. Удаление шумов из звука.

Преобразование Фурье полезно во многих приложениях. В распознавании речи преобразование Фурье и связанные с ним преобразования служат для восстановления произнесённых слов.

Задача преобразования Фурье возникает всякий раз, когда нужно как-либо работать с сигналом, представляемым в пространстве частот.

Чтобы лучше понять преобразование Фурье и то, как его можно применить, была решена задача фильтрации звука. Намеренно был создан звуковой сигнал с высокочастотным шумом, а затем этот шум был удалён с помощью преобразования Фурье.

§ 3.2. Нахождение границ на изображении.

Интуитивно понятно, что для синусоидального сигнала, если амплитуда меняется быстро за короткое время, можно сказать, что это высокочастотный сигнал. Если он изменяется медленно, это низкочастотный сигнал. Мы можем распространить ту же идею на изображения. Где амплитуда сильно различается на изображениях? На краевых точках или шумах.

Изображение это тоже своего рода функция, только от двух переменных x и y. И мы знаем значение функции $f(x, y)$ в каждом пикселе (x, y).

С использованием преобразования Фурье мы можем замечать в изображении закономерности, которые есть в исходном изображении, то есть можем представить изображение в удобной для анализа форме.

Мы можем просто удалять низкие частоты, и с помощью этого находить границы на изображении.

В приложениях предоставлены программные коды, реализующие идеи из раздела 3.

В Заключении описаны результаты проделанной работы.

В ходе магистерской работы было проделано следующее:

— определены основные понятия, связанные с теорией преобразования Фурье;

— получен аналог теоремы Хилле-Тамаркина в случае L^p_ω весовых пространств.

— написан программный код, позволяющий удалить шумы из звука с помощью преобразования Фурье.

— написан программный код, позволяющий находить границы на изображении с помощью преобразования Фурье.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Джрбашян, М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966. - 672 с.

2 Стейн, Э.М. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / Э.М. Стейн, Д. Г. Вайс. – М.: МИР, 1974. - 331 с.

3 Титчмарш, Е. К. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. К. Титчмарш. – М.: Гостехиздат, 1948. - 418 с.

4 Кусис, П. Введение в теорию пространств H^p / П. Кусис. – М.: Мир, 1984. - 368 с.

5 Седлецкий, А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации / А. М. Седлецкий. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 504 с.

6 Hille, E. On the absolute integrability of Fourier transforms / E. Hille, J. D. Tamarkin // Fundamenta Mathematicae. - 1933. - V. 25. - P. 329-352.

7 Zygmund, A. Trigonometrical Series / A. Zygmund. – Warszawa: Monogr. Mat., 1935. - 331 pp.

8 Hille, E. On a Theorem of Paley and Wiener / E. Hille, J. D. Tamarkin // Annals of Mathematics. - 1933. - V. 34, Is. 3 - P. 606-614.

9 Bochner, S. Vorlesungen uber Fouriersche Intregrale / S. Bochner. – Leipzig: Akad. Verlag., 1932. - 337 pp.

10 Paley, R. Notes on the theory and application of Fourier transforms / R. Paley, N. Wiener // Trans. Amer. Math. Soc. - 1933. - V. 35. - P. 348-355.

11 Duren, P. Theory of H^p spaces / P. Duren. – New York: Acad. Press, 1970. - 277 pp.

12 Гофман, К. Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман. – М.: Ин.Лит., 1963. - 311 с.

13 Привалов, И. И. Граничные свойства аналитических функций / И. И. Привалов. – М.: Гостехиздат, 1950. - 337 с.

14 Шамоян, Ф. А. О преобразованиях Фурье функций класса Р. Неванлинны в полуплоскости / Ф. А. Шамоян // Алгебра и анализ. - 2008. - Т. 20, №4. - С. 218-240.

15 Мандельбройт, С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей / С. Мандельбройт. – М.: ИЛ, 1955. - 268 с.

16 Шамоян, Ф. А. Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и классы аналитических функций с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями / Ф. А. Шамоян // Сиб. мат. журн. - 1995. - Т. 36, №4. - С. 943-953.

17 Винер, Н. Преобразование Фурье в комплексной области / Н. Винер, Р. Пэли. – М.: Наука, 1964. - 268 с.

18 Гарнетт, Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт. – М.: Мир, 1984. - 469 с.

19 Смирнов, В.И. Курс высшей математики. В 5 т. Т. 3. / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. - 672 с.

20 Lehar, S. An Intuitive Explanation of Fourier Theory / S. Lehar // Physics. - 2010. - P. 1-9.