МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Множество достижимости решений уравнения Лёвнера

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 - **Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Магомедова Ильи Магомедовича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ____________ Прохоров Д.В.
должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ____________ Разумовская Е.В.
должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Научно-исследовательская работа посвящена нахождению множества достижимости решений уравнения Лёвнера для круга.

Теория оптимального управления охватывает широкий круг задач, в которых при определенных ограничениях требуется минимизировать (максимизировать) заданный критерий качества.

В задачах оптимального управления важнейшую роль играет множество достижимости. Оно характеризует все возможные положения управляемой системы в каждый момент времени.

Актуальность темы исследования. Задачи оптимального управления встречаются в различных областях науки, техники, медицины, экономики, к примеру: задачи ядерной энергетики (управление охлаждением реактора), робототехники (движение роботов, управление всевозможными станками и автоматами), механики полета (самонаводящиеся ракеты, автопилоты, автоматическая стыковка на орбите, управление самолетом), экономики (задачи долговременного планирования), экологии (расчет допустимого воздействия на экосистему), биофизики и т.д.

Цели и задачи исследования. Задача - найти границу множества, которое может быть заполнено решениями уравнений Лёвнера - оптимальное управление. Это одна из задач теории оптимального управления.

Содержание работы. Основная часть работы состоит из двух разделов.

Первый раздел — "Теоретическая часть"— состоит из пяти пграфов. Здесь формулируются определения классов $S, S(M), S_R(M)$, дифференциального уравнения Лёвнера, а также рассматриваются методы теории управления в экстремальных проблемах класса S_M.

Во втором разделе — "Практическая часть"— происходит непосредственное решение поставленной задачи с помощью среды Wolfram Mathematica версии 13.0. Происходит решение системы из четырех дифференциальных уравнений, что приводит к нахождению точек, по которым строится граница искомого множества достижимости.

Методы исследования. Для выполнения поставленной задачи используются методы теории оптимального управления, в частности — принцип максимума Понтрягина.

Апробация работы. 16.11.2021 на научном семинаре кафедры математического анализа сделан доклад по материалам научно-исследовательской работы.

Основное содержание работы

Теоретические основые теории оптимального управления

В первом разделе приведены основные определения, относящиеся к теории оптимального управления.

Определение 1. S - класс голоморфных однолистных функций f в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ таких, что

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ..., z \in E \tag{1}$$

Рассмотрим роль свойства нелинейной однолистности в различных проблемах класса S.

Определение 2. Функция

$$K_\alpha(z) = z/(1 - e^{i\alpha} z)^2, \alpha \in \mathbb{R}$$

называется функцией Кёбе.

Функция Кёбе дает экстремумы для многих экстремальных задач в S.

Определение 3. $S(M), M > 1$ - класс функций $f \in S$ таких, что $|f(z)| < M$ в E.

Определение 4. $S_R(M)$ - класс функций $f \in S(M)$ таких, что $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Определение 5. Функция

$$\frac{M^2 P_\alpha^M(z)}{(M - P_\alpha^M(z))^2} = K_\alpha(z), z \in E, M > 1, P_\alpha^\infty = K_\alpha$$

или, что то же самое,

$$P_\alpha^M(z) = M K_\alpha^{-1}(1/M K_\alpha(z))$$

называется функцией Пика.

Определение 6. Дано

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu}+w}{e^{iu}-w}, w(z,0) = z, z \in E, 0 \leqslant t \leqslant \infty, \lim_{t\to\infty} e^{\prime} w(z,t) = f(z) \tag{2}$$

2 - дифференциальное уравнение Лёвнера.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w,t), p(0,t) = 1 \tag{3}$$

называется дифференциальным уравнением Лёвнера-Куфарева и оно обобщает уравнение 2.

Определение 7. Пусть $w(z,t)$ - интеграл дифференциального уравнения Лёвнера 2. Пусть $e^t w(z,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t) z^n, a_1(t) = 1$. Зададим квадратичную матрицу $A(t)$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_1(t) & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_2(t) & a_1(t) & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & ... & a_1(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Подставив $w(z,t)$ в 3 и приравняв коэффициенты при $z^k, 2 \leqslant k \leqslant n$, получим *систему уравнений фазового управления*, которую можно переписать в векторной форме по отношению к вектору $a(t) = (a_1(t), ..., a_n(t))^T$:

$$\frac{da(t)}{dt} = -2\sum_{s=1}^{n-1} e^{-s(t+in)} A^s(t) a(t), a(0) = a^0 = (1, 0, ..., 0)^T. \tag{4}$$

Определение 8. Граничная гиперплоскость ∂V_n^M у V_n^M является границей множества достижимости управляемой системы 4 на отрезке $[0, logM]$.

Поиск множества достижимости решений уравнения Лёвнера

Во втором разделе происходит непосредственное решение поставленной задачи.

Все вычисления проводятся с использоваем программ, написанных в системе Wolfram Mathematica 13.0.

Mathematica — проприетарная система компьютерной алгебры, широко используемая для научных, инженерных, математических расчётов. Система оснащена как аналитическими возможностями, так и обеспечивает численные расчёты; результаты выводятся как в алфавитно-цифровом виде, так и в форме графиков.

Вычислительные и аналитические функции обеспечиваются бэкендом, к которому могут подключаться различные пользовательские интерфейсы. Традиционный интерфейс, поставляющийся с системой — вычислительная записная книжка (notebook interface).

Система также осуществляет численные расчёты: определяет значения функций (в том числе специальных) с произвольной точностью, осуществляет полиномиальную интерполяцию функции от произвольного числа аргументов по набору известных значений, рассчитывает вероятности.

Теоретико-числовые возможности — определение простого числа по его порядковому номеру, определение количества простых чисел, не превосходящих данное; дискретное преобразование Фурье; разложение числа на простые множители, нахождение НОД и НОК.

Также в систему заложены линейно-алгебраические возможности — работа с матрицами (сложение, умножение, нахождение обратной матрицы, умножение на вектор, вычисление экспоненты, взятие определителя), поиск собственных значений и собственных векторов.

Система результаты представляет как в алфавитно-цифровой форме, так и в виде графиков. В частности, реализовано построение графиков функций, в том числе параметрических кривых и поверхностей; построение геометрических фигур (ломаных, кругов, прямоугольников и других); построение и манипулирование графами. Кроме того, реализовано воспроизведение звука, график которого задаётся аналитической функцией или набором точек.

Система обеспечивает автоматическую генерацию программного кода на языке Си и его компоновку; при этом сгенерированные программы могут быть использованы автономно. Для создания, обработки и оптимизации си-кода поддерживается использование SymbolicC. Программы могут использовать внешние динамические библиотеки, в том числе поддерживается интеграция с CUDA и OpenCL.

Составим систему из двух дифференциальных уравнений (т.н. фазовую систему). Правая часть первого уравнения - вещественная часть W, у второго - мнимая.

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = Re\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{x_1\left(-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2-1\right)+2x_2^2\cos(u(t))}{-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1} \\ \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = Im\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{x_2\left(-2x_1\cos(u(t))+x_1^2+x_2^2-1\right)+2x_1^2\sin(u(t))}{-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1} \end{cases} \tag{5}$$

Для решения фазовой системы составим функцию Гамильтона.

$$H(x_1,x_2,\psi_1,\psi_2) = \frac{(\psi_1 x_1+\psi_2 x_2)(-1+x_1^2+x_2^2)}{-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1}+ \\ + \frac{2(\psi_2(t)x1(t))(-x_2(t)cos(u(t))+x_1(t)sin(u(t)))}{-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1} \tag{6}$$

Далее запишем присоединенную систему дифференциальных уравнений, состоящую из двух уравнений: $\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -\frac{4\sin(u(t))\left(\psi_2 x_1-\psi_1 x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)-4\cos(u(t))\left(\psi_1 x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)+\psi_2(x_1-x_2)(x_1+x_2)\sin(u(t))+\psi_2 x_2\right)}{\left(-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1\right)^2}+ \\ \quad +\frac{\psi_1\left(x_1^4+2x_1^2\left(x_2^2+2\right)+x_2^4+4x_2^2-1\right)+4\psi_2 x_1 x_2\cos(2u(t))}{\left(-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1\right)^2} \\ \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -\frac{-4\sin(u(t))\left(\psi_1 x_1+\psi_2 x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)-4\cos(u(t))\left(\psi_2 x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)-\psi_1 x_2\right)+2\psi_1(x_1-x_2)(x_1+x_2)\sin(2u(t))}{\left(-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1\right)^2}- \\ \quad -\frac{4\psi_1 x_1 x_2\cos(2u(t))+\psi_2\left(x_1^4+2x_1^2\left(x_2^2+2\right)+x_2^4+4x_2^2-1\right)}{\left(-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1\right)^2} \end{cases} \tag{7}$$

Теперь найдем $u(t)$. Для этого составим следующее уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial u} =$$

$$= \frac{2\cos(u)(\psi_2(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^4 - x_2^2)}{(-2x_1\cos(u) - 2x_2\sin(u) + x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} -$$

$$-\frac{2\psi_1x_1x_2) - 4(x_1^2 + x_2^2)(\psi_2x_1 - \psi_1x_2) - 2\psi_1\sin(u)(x_1^4 + x_1^2(2x_2^2 - 1) + x_2^4 + x_2^2)}{(-2x_1\cos(u) - 2x_2\sin(u) + x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} +$$

$$+\frac{4\psi_2x_1x_2\sin(u)}{(-2x_1\cos(u) - 2x_2\sin(u) + x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} = 0$$

Домножим на знаменатель, получим:

$$2\cos(u)(\psi_2(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^4 - x_2^2) -$$

$$-2\psi_1x_1x_2) - 4(x_1^2 + x_2^2)(\psi_2x_1 - \psi_1x_2) - 2\psi_1\sin(u)(x_1^4 + x_1^2(2x_2^2 - 1) + x_2^4 + x_2^2) + 4\psi_2x_1x_2\sin(u) = 0$$

Введем замены:
$A = -4(x_1^2 + x_2^2)(\psi_2x_1 - \psi_1x_2)$
$B = 2(\psi_2(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^4 - x_2^2) - 2\psi_1x_1x_2)$
$C = 4\psi_2x_1x_2 - 2\psi_1(x_1^4 + x_1^2(2x_2^2 - 1) + x_2^4 + x_2^2)$
Получаем:

$$A + Bcos(u) + Csin(u) = 0.$$

Решения имеют следующий вид:

$$u_1(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2) = 2\left(\pi n + arctg(\frac{-\sqrt{-A^2 + B^2 + C^2} - C}{A - B})\right)$$

$$u_2(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2) = 2\left(\pi n + arctg(\frac{\sqrt{-A^2 + B^2 + C^2} - C}{A - B})\right)$$

Нужно выбрать то $u_i, i = 1, 2$, которое даёт максимум функции Гамильтона H. Нужно рассмотреть 2 случая: $\psi_1(0) = 1, \psi_1(0) = -1$. Для подстановки используем следующие значения:

$x_1(0) = r = 0.8$

$x_2(0) = 0$

$\psi_1(0) = \pm 1$

$\psi_2(0) = T = 3$

$n = 1$

После всех подстановок было установлено, что в обоих случаях максимумом является u_1.

Для поиска области достижимости требуется составить следующую систему дифференциальных уравнений из систем 5 и 7 с начальными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = Re\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{x_1\left(-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2-1\right)+2x_2^2\cos(u(t))}{-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1} \\ \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = Im\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{x_2\left(-2x_1\cos(u(t))+x_1^2+x_2^2-1\right)+2x_1^2\sin(u(t))}{-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1} \\ \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{4\sin(u(t))\left(\psi_2 x_1-\psi_1 x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)-4\cos(u(t))\left(\psi_1 x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)+\psi_2(x_1-x_2)(x_1+x_2)\sin(u(t))+\psi_2 x_2\right)}{(-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1)^2}+ \\ \qquad +\frac{\psi_1\left(x_1^4+2x_1^2\left(x_2^2+2\right)+x_2^4+4x_2^2-1\right)+4\psi_2 x_1 x_2\cos(2u(t))}{(-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{-4\sin(u(t))\left(\psi_1 x_1+\psi_2 x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)-4\cos(u(t))\left(\psi_2 x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)-\psi_1 x_2\right)+2\psi_1(x_1-x_2)(x_1+x_2)\sin(2u(t))}{(-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1)^2}- \\ \qquad -\frac{4\psi_1 x_1 x_2\cos(2u(t))+\psi_2\left(x_1^4+2x_1^2\left(x_2^2+2\right)+x_2^4+4x_2^2-1\right)}{(-2x_1\cos(u(t))-2x_2\sin(u(t))+x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \\ x_1(0) = r = 0.8, -\infty < r < +\infty \\ x_2(0) = 0 \\ \psi_1(0) = \pm 1 \\ \psi_2(0) = \tau, -\infty < \tau < +\infty \end{cases} \tag{8}$$

$x_1(0) = r = 0.8, -\infty < r < +\infty$

$x_2(0) = 0$

$\psi_1(0) = \pm 1$

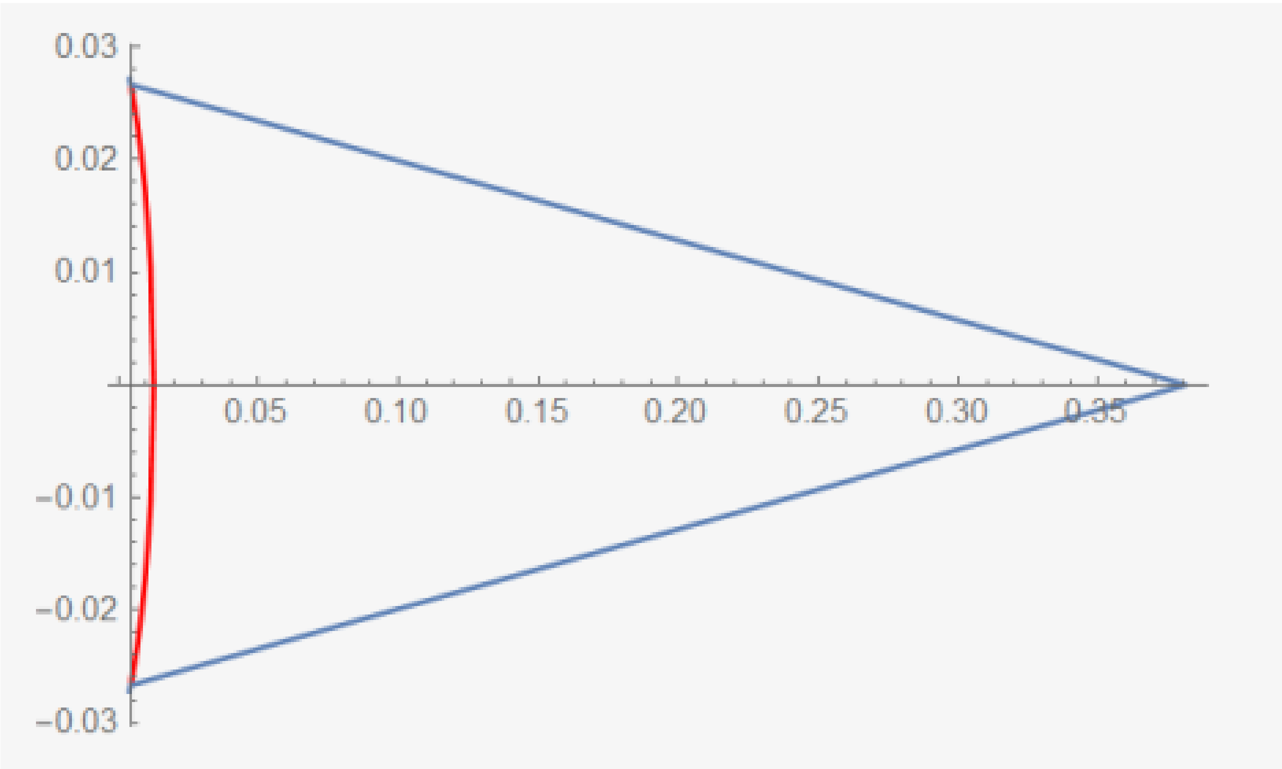
$\psi_2(0) = T = 3$

$n = 1$

Текст программы приведен в приложении А.

После всех вычислений были получены две таблицы с точками, по которым была построена граница множества достижимости:

Рисунок 1 — Множество достижимости решений уравнения Лёвнера для единичного круга



Таким образом, была доказана следующая теорема:

Теорема 1. Границей множества достижимости уравнения Лёвнера 2 является кривая Γ, заданная параметрическими уравнениями

$$x_1 = x_1(T, \tau), x_2 = x_2(T, \tau),$$

где $x_1(T, \tau), x_2(, \tau)$ - это решения $x_1(t), x_2(t)$ дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = Re\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{x_1\left(-2x_2\sin(u(t)) + x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + 2x_2^2\cos(u(t))}{-2x_1\cos(u(t)) - 2x_2\sin(u(t)) + x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = Im\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{x_2\left(-2x_1\cos(u(t)) + x_1^2 + x_2^2 - 1\right) + 2x_1^2\sin(u(t))}{-2x_1\cos(u(t)) - 2x_2\sin(u(t)) + x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

системы 8 в момент $t = T$, в которой τ служит начальным условием уравнения $\psi_2(0) = \tau$, а управляющая функция $u(t)$ задается уравнением

$$u_2(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2) = 2\left(\pi n + arctg(\frac{\sqrt{-A^2 + B^2 + C^2} - C}{A - B})\right),$$

$$A = -4(x_1^2 + x_2^2)(\psi_2 x_1 - \psi_1 x_2),$$

$$B = 2(\psi_2(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^4 - x_2^2) - 2\psi_1 x_1 x_2),$$

$$C = 4\psi_2 x_1 x_2 - 2\psi_1(x_1^4 + x_1^2(2x_2^2 - 1) + x_2^4 + x_2^2),$$

согласно принципу максимума Понтрягина. Кривая Γ состоит из двух кривых Γ_1 и Γ_2, которые соответствуют начальным данным $\psi_1(0) = 1$ и $\psi_1(0) = -1$, соответственно, в системе 8.

Заключение

В работе была найдена граница множества, которое может быть заполнено решениями уравнений Лёвнера - оптимальное управление, и решена одна из задач теории оптимального управления.

Для достижения результатов была написана программа в система Wolfram Mathematica 13.0, благодаря которой были получены таблицы значений, исходя из которых была построена предполагаемая граница множества достижимости решений уравнения Лёвнера для единичного круга.

Также были рассмотрены основные аспекты теории оптимального управления: основные определения, теоремы, свойства.

Кроме того, подробно рассмотрены методы теории оптимального управления, используемые в экстремальных задачах класса ограниченных однолистных функций.

Более того, в процессе достижения результатов был получен колоссальный опыт работы и написания программ в системе Wolfram Mathematica 13.0.

ПРИЛОЖЕНИЕ А Получение точек для построения множества достижимости

```
(* ::Package:: *)

W[x1_,x2_, u_] = -(x1 + I*x2) * (Exp[I*u] + x1 + I*x2)/(
   Exp[I*u] - x1 - I*x2)


dx1dt[x1_, x2_, psi1_, psi2_, u_] = FullSimplify[
   ComplexExpand[Re[W[x1,x2,u]]]]
dx2dt[x1_, x2_, psi1_, psi2_, u_] = FullSimplify[
   ComplexExpand[Im[W[x1,x2,u]]]]


H[x1_, x2_, psi1_, psi2_, u_] = FullSimplify[psi1*dx1dt[x1
   , x2, psi1, psi2, u] + psi2*dx2dt[x1, x2, psi1, psi2, u
   ]]
DPSI1[x1_, x2_, psi1_, psi2_, u_] = -FullSimplify[D[H[x1,
   x2, psi1, psi2, u], x1]]
DPSI2[x1_, x2_, psi1_, psi2_, u_] = -FullSimplify[D[H[x1,
   x2, psi1, psi2, u], x2]]


DH[x1_, x2_, u] = FullSimplify[D[(psi2 (x2 (-1+x1^2+x2^2-2
    x1 Cos[u])+2 x1^2 Sin[u]))/(1+x1^2+x2^2-2 x1 Cos[u]-2
   x2 Sin[u])+(psi1 (2 x2^2 Cos[u]+x1 (-1+x1^2+x2^2-2 x2
   Sin[u])))/(1+x1^2+x2^2-2 x1 Cos[u]-2 x2 Sin[u]), u]]
```

```
-4 (psi2 x1-psi1 x2) (x1^2+x2^2)+2 (-2 psi1 x1 x2+psi2 (x1
   ^2+x1^4-x2^2+2 x1^2 x2^2+x2^4)) Cos[u]+4 psi2 x1 x2 Sin[
   u]-2 psi1 (x1^4+x2^2+x2^4+x1^2 (-1+2 x2^2)) Sin[u]
```

```
A1+B1*Cos[u]+C1*Sin[u]==0
```

```
ClearAll[A1,B1,C1,tau]
(*x1=0.8,x2=0,psi1=-1,psi2=3)*)
A1[x1_,x2_,psi1_,psi2_] = -4 (psi2 x1-psi1 x2) (x1^2+x2^2)
B1[x1_,x2_,psi1_,psi2_]  = 2 (-2 psi1 x1 x2+psi2 (x1^2+x1
   ^4-x2^2+2 x1^2 x2^2+x2^4))
C1[x1_,x2_,psi1_,psi2_]  = 4 psi2 x1 x2 -2 psi1 (x1^4+x2
   ^2+x2^4+x1^2 (-1+2 x2^2))
u1 = FullSimplify[2(\[Pi]*1+ArcTan[(-C1[0.8,0,-1,3]-Sqrt[-
   A1[0.8,0,-1,3]^2+B1[0.8,0,-1,3]^2+C1[0.8,0,-1,3]^2])/(A1
   [0.8,0,-1,3]-B1[0.8,0,-1,3])])]
u2 = FullSimplify[2(\[Pi]*1+ArcTan[(-C1[0.8,0,-1,3]+Sqrt[-
   A1[0.8,0,-1,3]^2+B1[0.8,0,-1,3]^2+C1[0.8,0,-1,3]^2])/(A1
   [0.8,0,-1,3]-B1[0.8,0,-1,3])])]
FullSimplify[H[0.8, 0, -1, 3, u1]]
FullSimplify[H[0.8, 0, -1, 3, u2]]
```

```
u2max[x1_,x2_,psi1_,psi2_] = FullSimplify[2(\[Pi]*1-ArcTan
   [(-(4 psi2[t] x1[t] x2[t]-2 psi1[t] (x1[t]^4+x2[t]^2+x2[
   t]^4+x1[t]^2 (-1+2 x2[t]^2)))-Sqrt[-(-4 (psi2[t] x1[t]-
   psi1[t] x2[t]) (x1[t]^2+x2[t]^2))^2+(2 (-2 psi1[t] x1[t]
    x2[t]+psi2[t] (x1[t]^2+x1[t]^4-x2[t]^2+2 x1[t]^2 x2[t
   ]^2+x2[t]^4)))^2+(4 psi2[t] x1[t] x2[t]-2 psi1[t] (x1[t
   ]^4+x2[t]^2+x2[t]^4+x1[t]^2 (-1+2 x2[t]^2)))^2])/((-4 (
   psi2[t] x1[t]-psi1[t] x2[t]) (x1[t]^2+x2[t]^2))-(2 (-2
```

```
    psi1[t] x1[t] x2[t]+psi2[t] (x1[t]^2+x1[t]^4-x2[t]^2+2
    x1[t]^2 x2[t]^2+x2[t]^4)))))])]
FullSimplify[dx1dt[x1, x2, psi1, psi2, u2max]]
FullSimplify[dx2dt[x1, x2, psi1, psi2, u2max]]
FullSimplify[DPSI1[x1, x2, psi1, psi2, u2max]]
FullSimplify[DPSI2[x1, x2, psi1, psi2, u2max]]



Points = {}
For[T = -1, T >= -100, T-=0.5,
clearAll[sol];
sol := NDSolve[
{
x1'[t] == (2 x2[t]^2 Cos[u2max[x1,x2,psi1,psi2]]+x1[t]
    (-1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x2[t] Sin[u2max[x1,x2,psi1,psi2]])
    )/(1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t] Cos[u2max[x1,x2,psi1,psi2
    ]]-2 x2[t] Sin[u2max[x1,x2,psi1,psi2]]),

x2'[t] == (x2[t] (-1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t] Cos[u2max[x1,
    x2,psi1,psi2]])+2 x1[t]^2 Sin[u2max[x1,x2,psi1,psi2]])
    /(1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t] Cos[u2max[x1,x2,psi1,psi2
    ]]-2 x2[t] Sin[u2max[x1,x2,psi1,psi2]]),

psi1'[t] == -((psi1[t] (-1+x1[t]^4+4 x2[t]^2+x2[t]^4+2 x1[
    t]^2 (2+x2[t]^2))+4 psi2[t] x1[t] x2[t] Cos[2 u2max[x1,
    x2,psi1,psi2]]+4 (psi2[t] x1[t]-psi1[t] x2[t] (x1[t]^2+
    x2[t]^2)) Sin[u2max[x1,x2,psi1,psi2]]-4 Cos[u2max[x1,x2,
    psi1,psi2]] (psi2[t] x2[t]+psi1[t] x1[t] (x1[t]^2+x2[t
    ]^2)+psi2[t] (x1[t]-x2[t]) (x1[t]+x2[t]) Sin[u2max[x1,x2
    ,psi1,psi2]]))/(1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t] Cos[u2max[x1,
    x2,psi1,psi2]]-2 x2[t] Sin[u2max[x1,x2,psi1,psi2]])^2),
```

```
psi2'[t] == (-psi2[t] (-1+x1[t]^4+4 x2[t]^2+x2[t]^4+2 x1[t]^2 (2+x2[t]^2))+4 (-psi1[t] x2[t]+psi2[t] x1[t] (x1[t]^2+x2[t]^2)) Cos[u2max[x1,x2,psi1,psi2]]+4 psi1[t] x1[t] x2[t] Cos[2 u2max[x1,x2,psi1,psi2]]+4 (psi1[t] x1[t]+psi2[t] x2[t] (x1[t]^2+x2[t]^2)) Sin[u2max[x1,x2,psi1,psi2]]-2 psi1[t] (x1[t]-x2[t]) (x1[t]+x2[t]) Sin[2 u2max[x1,x2,psi1,psi2]])/(1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t] Cos[u2max[x1,x2,psi1,psi2]]-2 x2[t] Sin[u2max[x1,x2,psi1,psi2]])^2,
x1[0]==0.8,
x2[0]==0,
psi1[0]==-1,
psi2[0]==T
},
{x1,x2,psi1,psi2},
{t,0,10},
 Method -> { "StiffnessSwitching" , "NonstiffTest" -> False}
];
AppendTo[Points,{x1[3] /. First[sol], x2[3] /. First[sol]}];
(*Print[{x1[3] /. sol, x2[3] /. sol}]*)
]
Print[Points]
```