

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

**МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ  
ЛЁВНЕРА-КУФАРЕВА**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 - Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Гахраманова Сурхая Галибовича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Прохоров Д.В.

подпись, дата

Зав. кафедрой

и.о.зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_ Разумовская Е.В.

подпись, дата

Саратов 2022

## **ВВЕДЕНИЕ**

Данная выпускная квалификационная работа посвящена нахождению множества достижимости решений уравнения Левнера-Куфарева для единичного круга.

Теория оптимального управления охватывает широкий круг задач, в которых при определенных ограничениях требуется минимизировать (максимизировать) заданный критерий качества.

В задачах оптимального управления важнейшую роль играет множество достижимости. Оно характеризует все возможные положения управляемой системы в каждый момент времени.

**Актуальность темы исследования.** Задачи оптимального управления встречаются в различных областях науки, техники, медицины, экономики, к примеру задачи ядерной энергетики (управление охлаждением реактора), работотехники (движение роботов, управление всевозможными станками и автоматами), механики полета (самонаводящиеся ракеты, автопилоты, автоматическая стыковка на орбите, управление самолетом) и т. д..

**Цели и задачи исследования.** Задача - найти границу множества, которое может быть заполнено решениями уравнений Левнера-Куфарева (оптимальное управление). Это одна из задач теории оптимального управления.

**Содержание работы.** В 1 главе данной работы рассматриваются вариационные и параметрические методы в экстремальных задачах для однолистных функций. Во 2 главе рассматриваются множества значений для систем функционалов. В 3 главе оценки коэффициентов для ограниченных однолистных функций. И в 4 главе проведена практическая работа в которой было необходимо получить область достижимости уравнения Левнера-Куфарева.

**Методы исследования.** Для выполнения поставленной задачи используются методы теории оптимального управления, в частности принцип максимума Понтрягина.

**Апробация работы.** На научном семинаре 23.05.2022 кафедры математического анализа сделан доклад по материалам выпускной квалификационной работы.

## 1 Основное содержание работы

Вариационный метод решения экстремальных задач в комплексном анализе хорошо известен, четко описан в книгах и статьях и высоко оценен во многих обзорах. Не будем повторять детали его применения. Только напомним, что, поскольку многие рассматриваемые классы функций компактны, существование экстремальных функций для непрерывных функционалов тривиально гарантировано, и это позволяет быть свободными от трудностей, характерных для вариационного исчисления.

С другой стороны, нелинейное условие однолистности создает много сложностей при выводе вариационных формул для богатого подмножества функций из окрестности экстремальной функции. Глубокие вариационные принципы граничных и внутренних вариаций Шиффера, вариационный метод Голузина и вариации порождающих мер в представлении Левнера-Куфарева приводят к близким дифференциальным уравнениям для экстремальной функции. Эти обыкновенные дифференциальные уравнения играют роль, аналогичную уравнениям Эйлера в вариационных задачах.

Несколько сложнее найти аналоги неравенствам Вейерштрасса, хотя их можно обнаружить в свойствах граничных континуумов экстремальных областей, являющихся траекториями квадратичных дифференциалов.

Вариационный метод является важным инструментом в решении или исследовании экстремальных задач. В дополнение к хорошим примерам его эффективных приложений, также обеспечил основу для современных методов экстремальных длин, квадратичных дифференциалов и теории пространств Тейхмюллера.

Но решающую роль в историческом доказательстве гипотезы Бибербаха суждено было сыграть параметрическому методу представления конформных отображений диска (круга). Теперь узнаем больше подробностей об этом.

Конформные отображения для круга с разрезом образуют плотный подкласс всех конформных отображений единичного диска (круга). Эта простая идея Каратеодори была реализована в параметрическом методе благодаря мастерству Левнера в описании кусочно - гладкой деформации  $w(z, t), 0 \leq$

$t < \infty$ , между тождеством  $w = z$  и заданным отображение  $w = f(z)$  с помощью обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -w \frac{e^{iu} + w}{e^{iu} - w}, w(z, 0) = z, \quad (1.1)$$

$$0 < |z| < 1, 0 \leq t < \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} e^t w(z, t) = f(z).$$

Функция  $u = u(t)$  здесь кусочно непрерывна на  $[0, \infty)$ . Каждое решение  $w(z, t)$ , а, следовательно, и предельная функция  $f(z)$ , одномерна в  $E$ . Множество всех функций  $e^t w(z, t), t \geq 0$ , плотен в  $S$ .

Дифференциальное уравнение Левнера (1.1) параметрически описывает не только класс  $S$ , но и его подклассы

$$S^M = \{f : f \in S, |f(z)| < M, |z| < 1\}, M > 1,$$

из ограниченных функций от  $S$ . Для этого достаточно интегрировать пример (1.1) на замкнутом интервале  $[0, \log M]$ . Множество всех функций  $Mw(z, \log M)$  является плотным в  $S^M$ .

Нетривиальное обобщение уравнения Левнера означает переход к выпуклой комбинации ядер Шварца, т. е. к замене дифференциального уравнения (1.1) обобщенным дифференциальным уравнением Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad (1.2)$$

с теми же дополнительными условиями, что и в (1.1).

Векторнозначная функция  $u = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  здесь кусочно непрерывна на  $[0, \infty)$  и  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  - кусочно-непрерывная векторнозначная функция с отрицательными координатами,  $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ . Как и прежде, решения для уравнения (1.2), это параметризовать подкласс классов  $S$  или  $S^M$ .

Обобщение (1.2) служит промежуточным шагом от уравнения (1.1) к разнице Левнера-Куфарева, а именно, целое уравнение

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w, t) \quad (1.3)$$

с теми же дополнительными условиями, что и в (1.1), и с функцией  $p$ ,  $p(0, t) = 1$ , которая аналитична в  $E$  относительно первой переменной и измерима на  $[0, \infty)$  по отношению ко второй переменной и имеет положительную действительную часть. Решения для уравнения (1.3) - параметризовать весь класс  $S$ .

Обобщенное дифференциальное уравнение (1.2) является промежуточным, оно представляется, как важное значение для применения методов оптимизации при решении экстремальных задач.

Вывод и описание дифференциального уравнения Левнера (1.1), его обобщения (1.2), уравнения Левнера-Куфарева (1.3), а также их связей и отношений между множествами решений можно найти в (??, 2.2).

В течение длительного времени параметрический метод конкурировал с вариационным для оценки функций в классах однолистных функций. Его действие основано на следующем подходе. Пусть  $w(z, t)$  - решение краевой задачи для дифференциального уравнения ((1.1) (1.2) или (1.3)):  $f_t = f(z, t) = e^t w(z, t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(z, t) = f(z)$ . Параметризуем значения  $L(f)$  функционала  $L$  в функции  $f$  с помощью семейства  $L(f_t)$  и напишем для него дифференциальное уравнение, вытекающее из (1.1) и имеющее правую часть со значением в замкнутом интервале  $[m(z, t), M(z, t)]$ . Подставим это уравнение в дифференциальное неравенство

$$m(z, t) \leq \frac{dL(f_t)}{dt} \leq M(z, t), l(f_t)|_{t=0} = L(z),$$

интегрируем его на  $[0, \infty)$ , и получим оценки для  $L(f)$ . Оценка оказывается точной, если существует семейство  $f(t)$  такое, что правая часть интегрального дифференциального уравнения для  $f(t)$  совпадает с  $M(z, t)$  или  $m(z, t)$  для всех  $t \geq 0$ .

Такой подход позволяет решать даже изопериметрические экстремальные задачи, в частности популярные в последние десятилетия задачи оценки функционалов в классах однолистных функций с фиксированными начальными коэффициентами. Само собой разумеется, что если функция  $f$  имеет фиксированный коэффициент, то его производящая функция  $p(w, t)$  из правой части уравнения Левнера-Куфарева (1.3) может иметь произволь-

ный коэффициент  $p_1(t) = \frac{\partial p(w, t)}{\partial w}|_{w=0}$  удовлетворяя единственному условию  $-\int_0^\infty p_1(t)dt = a_2$ .

Однако в некоторых подклассах однолистных функций, полученных явным интегрированием, в частности, случаи уравнения Левнера-Куфарева (1.3), соотношение между коэффициентами  $a_2$  и  $p_1(t)$  является еще строже. Таким образом, для действительного  $\alpha$  пусть

$$p(z) = \alpha(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}) + (1 - \alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)};$$

определим функцию  $f$ , голоморфную в  $E$  и нормализованную разложением (??),  $f'(z)f(z)/z \neq 0$ , которая называется  $\alpha$ -выпуклой или функцией Мокану, если  $Rep(z) > 0, z \in E$ .

Класс функций Мокану может быть получен для  $\alpha > 0$  интегрированием, в частности, уравнением Левнера-Куфарева (1.3) с правой стороной

$$p(w, t) = (e^{-t/\alpha} + (1 - e^{-t/\alpha})p(w))^{-1}, Rep(w) > 0.$$

Фиксация начальных коэффициентов  $a_2, \dots, a_n$  функция  $f$  эквивалентна соответствующей фиксации коэффициентов  $p_1, \dots, p_{n-1}$  в разложении  $p(w)$ .

Индукцией было доказано, что при некоторых дополнительных ограничениях для заданного  $w$  и фиксированного множества значений семейства функционалов  $p(w, t), t \geq 0$ , в этом классе содержится полоса  $m(w, t) \leq -Rep(w, t) \leq M(w, t)$ . Более того, существует семейство  $p(w, t)$  такое, что  $p(w, t)$  совпадает с  $m(w, t)$  или  $M(w, t)$  для всех  $t \geq 0$ . Интегрирование дифференциального неравенства

$$m(w, t) \leq \frac{d \log |w(z, t)|}{dt} \leq M(w, t),$$

приходим к точной оценке  $|f(z)|$  сверху или снизу в классе функций Мокану с фиксированными коэффициентами  $a_2, \dots, a_n$ .

Формулируем следствие этого общего результата для  $n = 2$ .

**Теорема 1.1.** Пусть функция  $f$ , нормированная разложением (??),  $\alpha$ -выпуклая,  $\alpha > 0$ . Подставили

$$\epsilon = -((1 + \alpha) |a_2| - i(4 - (1 + \alpha))^2 |a_2|^2)^{1/2})/2,$$

$$\lambda = (1 + \alpha) |a_2| / 2 + 1.$$

Тогда для всех  $z$  справедливо следующее точное неравенство:

$$\left( \frac{1}{\alpha} \int_0^{|z|} \left( \frac{t}{(1 - \epsilon t)(1 - \bar{\epsilon}t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dt}{t} \right)^\alpha \leq |f(z)| \leq \left( \frac{1}{\alpha} \int_0^{|z|} \left( \frac{t}{(1 - t)^\lambda (1 + t)^{2-\lambda}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dt}{t} \right)^\alpha$$

## 2 Практическая часть

В задачах оптимального управления важную роль играет множество достижимости. Множество достижимости показывает все возможные положения управляемой системы в каждый момент времени.

Дано уравнение Левнера-Куфарева:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-we^{iu}}{e^{iu} - w} \quad (2.1)$$

где

$$w = x_1 + ix_2,$$

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

подставляем в уравнение и получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{-((x_1 + ix_2)(\cos u + i \sin u))}{\cos u + i \sin u - (x_1 + ix_2)} = \\ &= \frac{-((x_1 + ix_2)(\cos u + i \sin u))}{\cos u + i \sin u - x_1 - ix_2} * \frac{\cos u - x_1 - i \sin u + ix_2}{\cos u - x_1 - i \sin u + ix_2} \end{aligned}$$

отделим вещественную и мнимую части уравнения:

вещественная часть:

$$\frac{-x_1 + \cos u(x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2 - 2(\cos u x_1 + \sin u x_2))} \quad (2.2)$$

мнимая часть:

$$\frac{-x_2 + \sin u(x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2 - 2(\cos u x_1 + \sin u x_2))} \quad (2.3)$$

тем самым получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{-x_1 + \cos u(x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2 - 2(\cos u x_1 + \sin u x_2))} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{-x_2 + \sin u(x_1^2 + x_2^2)}{(1 + x_1^2 + x_2^2 - 2(\cos u x_1 + \sin u x_2))} \end{cases}$$

с начальными условиями  $x_1(0) = r, x_2(0) = 0$

Далее построим функцию Гамильтона, она будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
H = & -\frac{\psi_1(-x_1 + \cos u(x_1^2 + x_2^2))}{1 + x_1^2 + x_2^2 - 2(\cos ux_1 + \sin ux_2)} + \\
& + \frac{\psi_2(-x_2 + \sin u(x_1^2 + x_2^2))}{1 + x_1^2 + x_2^2 - 2(\cos ux_1 + \sin ux_2)} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{dH}{dx_1} \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{dH}{dx_2} \end{array} \right. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$-\frac{dH}{dx_1} =$$

$$-(-\psi_1 + 2(\psi_1 x_1 - \psi_2 x_2) \cos[u] + (-\psi_1 x_1^2 + 2\psi_2 x_1 x_2 + \psi_1 x_2^2) \cos[2u] +$$

$$+2(\psi_2 x_1 + \psi_1 x_2) \sin[u] + (-\psi_2 x_1^2 - 2\psi_1 x_1 x_2 + \psi_2 x_2^2) \sin[2u])$$

- числитель

$$(2(1 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cos[u] - 2x_2 \sin[u])^2)$$

- знаменатель

$$-\frac{dH}{dx_2} =$$

$$-(-\psi_2 + (-\psi_2 x_1^2 - 2\psi_1 x_1 x_2 + \psi_2 x_2^2) \cos[2u] - 2\psi_1 x_1 \sin[u] +$$

$$+2\psi_2 x_2 \sin[u] + 2\cos[u](\psi_2 x_1 + \psi_1 x_2 + (-2\psi_2 x_1 x_2 + \psi_1(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)) \sin[u]))$$

- числитель

$$(2(1 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cos[u] - 2x_2 \sin[u])^2)$$

- знаменатель

$$\frac{dH}{du} =$$

$$(-2(\psi_2 x_1 - \psi_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + (-2\psi_1 x_1 x_2 + \psi_2(x_1^2 + x_1^4 - x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4)) \cos u + \\ + (2\psi_2 x_1 x_2 - \psi_1(x_1^4 + x_2^2 + x_2^4 + x_1^2(-1 + 2x_2^2))) \sin u)$$

- числитель

$$(2(1 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cos u - 2x_2 \sin u)^2)$$

- знаменатель

Приравниваем  $\frac{dH}{du} = 0$  и найдем управляющую функцию  $u$

Обозначим:

$$A = (-2(\psi_2 x_1 - \psi_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2))$$

$$B = (-2\psi_1 x_1 x_2 + \psi_2(x_1^2 + x_1^4 - x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4))$$

$$C = 2\psi_2 x_1 x_2 - \psi_1(x_1^4 + x_2^2 + x_2^4 + x_1^2(-1 + 2x_2^2))$$

Получаем что нужно найти  $u$  по функции

$$A + BC \cos(u) + CS \sin(u) = 0$$

Получаем :

$$u = 2(\pi n + \arctan(\frac{-C - \sqrt{-A^2 + B^2 + C^2}}{A - B})), n \in \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

$$u = 2(\pi n + \arctan(\frac{\sqrt{-A^2 + B^2 + C^2} - C}{A - B})), n \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

**Теорема 2.1.** Границей множества достижимости уравнения Левнера (Левнера-Куфарева) является кривая  $\Gamma$ , заданная параметрическими уравнениями

$$x_1 = x_1(T, \tau), x_2 = x_2(T, \tau),$$

где  $x_1(T, \tau), x_2(T, \tau)$  это решение  $x_1(t), x_2(t)$  дифференциальных уравнений (2.2, 2.3) системы (2.4) в момент  $t = T$ , в которой  $\tau$  служит начальным условием  $\psi_2(0) = \tau$ , а управляющая функция  $u(t)$  задается уравнением (2.5) согласно принципу максимума Понtryгина. Кривая  $\Gamma$  состоит из двух кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые соответствуют начальным данным  $\psi_1(0) = 1$  и  $\psi_2(0) = -1$ , соответственно, в системе (2.4).

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной выпускной работе были достигнуты следующие цели и задачи:

- описаны вариационные и параметрические методы в экстремальных задачах для однолистных функций;
- рассмотрены общие задачи о системах функционалов и системах коэффициентов;
- дана оценка коэффициентов для ограниченных однолистных функций, а именно рассмотрена гипотеза Кжижа и обобщенная гипотеза Кжижа;
- проделана практическая работа, а именно построена область (множество) достижимости уравнения Левнера-Куфарева.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Schaeffer, A. C. Coefficient regions for Schlicht functions / A. C. Schaeffer, D. C. Spencer. – NY. : Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1950.
- 2 Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. – М. : Наука, 1966.
- 3 Jenkins, J. A. Univalent Functions and Conformal Mapping / J. A. Jenkins, – Berlin : Springer-Verlag, 1958.
- 4 Милин, И. М. Однолистные функции и ортонормированные системы / И. М. Милин. – М. : Наука, 1971.
- 5 Бабенко, К. И. К теории экстремальных задач для однолистных функций класса / К. И. Бабенко. – М. : Мат. Инст., 1972. – 101 с.
- 6 Лебедев, Н. А. Принцип площади в теории однолистных функций / Н. А. Лебедев. – М. : Наука, 1975.
- 7 Pommerenke, C. Univalent Functions / C. Pommerenke. – Gottingen, 1975.
- 8 Александров И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций / И. А. Александров. – М. : Наука, 1976.
- 9 Tammi, O. Extremal problems for bounded univalent functions / O. Tammi. – NY. : Springer-Verlag, 1978.
- 10 Кузьмина, Г. И. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы / Г. В. Кузьмина. – М. : Мат. Инст., 1980. – 139 с.
- 11 Duren, P. L. Univalent Functions / P. L. Duren. – NY. : Springer-Verlag, 1983.
- 12 Прохоров, Д. В. Методы достижимых множеств в экстремальных задачах для однолистных функций / Д. В. Прохоров. – Саратов. : Саратовский Университет, 1993.
- 13 Кузьмина, Г. И. Методы теории геометрических функций, I / Г. В. Кузьмина. – М. : Наука, 1997. – 103 с.

- 14 Авхадиев, Ф. Г. Оценки функций Блоха и их обобщение / Ф. Г. Авхадиев, И. Р. Каюмов. – М. : Наука, 1996. – 201 с.
- 15 Старков, В. В. Логарифмические коэффициенты локально однолистных функций / В. В. Старков., 1989. – 13 с.
- 16 Tammi, O. Extremal problems for bounded univalent functions, II / O. Tammi. – NY. : Springer-Verlag, 1982.
- 17 Авхадиев, Ф. Г. Конформные отображения и краевые задачи / Ф. Г. Авхадиев. – М. : Наука, 1996.
- 18 Кузьмина, Г. И. Методы теории геометрических функций, II / Г. В. Кузьмина. – М. : Наука, 1997. – 50 с.
- 19 Александров, И. А. Параметрические продолжения в теории одновалентных функций / И. А. Александров. – М. : Наука, 1976.
- 20 Александров, И. А. О начальных коэффициентах ограниченных голоморфных функций / И. А. Александров, Б. Я. Крючков, В. И. Попов. – Докл. Акад. Наук СССР, Сер. А, № 1, 1973. – С. 3 – 5
- 21 Александров, И. А. Оптимальные управления и одновалентные функции / И. А. Александров, В. И. Попов. – Энн. Univ. M. Кюри-Склодовская, Раздел А, 1968. – С. 22 – 24
- 22 Александров, И. А. Экстремальные свойства одновалентных голоморфных функций с вещественные коэффициенты / И. А. Александров, Г. А. Попова. – Сиб. Мат. Ж., 14, № 5, 1973. – С. 915 – 926
- 23 Авхадиев, Ф. Г. Конформные отображения и граничные задачи / Ф. Г. Авхадиев. – Казань : Казанский фонд "Математика 1996.
- 24 Авхадиев, Ф. Г. Оценки в классе Блоха и обобщения / Ф. Г. Авхадиев, И. Р. Каюмов. – М. : Докл. Российской Акад. Наук, 1996. – 585 с.
- 25 Авхадиев, Ф. Г. Оценки функций Блоха и их обобщение / Ф. Г. Авхадиев, И. Р. Каюмов. – М. : Наука, 1996. – 201 с.

- 26 Бабенко, К. И. К теории экстремальных задач для одновалентных функций класса S / К. И. Бабенко, В. А. Стеклов. – М.: Мат. Инст. , 1972. – 101 с.
- 27 Бахтин, А. К. О коэффициентах одновалентных функций / А. К. Бахтин. – Киев : Инст. мат. Акад. Наук Украины. ССР, 1978.
- 28 Бахтин, А. К. О коэффициентах функций класса S / А. К. Бахтин. – М. : Докл. Акад. Наук СССР, 1980. – 1035 с.
- 29 Бахтин, А. К. Некоторые свойства функций класса S / А. К. Бахтин. – Киев : Укр. Мат. Ж., 1981. – С. 154 – 159
- 30 Бахтин, А. К. Экстремумы линейных функционалов / А. К. Бахтин. – Киев : Инст. мат. Акад. Наук Украины. ССР, 1986.
- 31 Бранджес, Л. Доказательство гипотезы Бибербаха / Л. Бранджес. – Ленинград : ЛОМИ, 1984.
- 32 Бранджес, Л. Доказательство гипотезы Бибербаха / Л. Бранджес. – Acta Math., 1985. – С. 137 – 152
- 33 Brown, J. E. О задаче о коэффициентах для неисчезающих функций НР / J. E. Brown. – Компл. Var., 1985. – С. 253 – 265
- 34 Brown, J. E. Терации функций, подчиненных функциям Шлихта / J. E. Brown. – Компл. Var., 1987. – С. 143 – 152
- 35 Делин Тан, Оценки коэффициентов для ограниченных неисчезающих функций / Делин Тан. – Китайская энциклопедия математики, 1983. – С. 97 – 104
- 36 Дюрен, П. Л. Одновалентные функции / П. Л. Дюрен. – Нью-Йорк : Спрингер-Верлаг, 1983.
- 37 Дзюбинский, И. Уравнение экстремальных функций семьи, объединенных симметрикой и рождением / И. Дзюбинский. – Соч. Ученый. Лодзь, сек. III, 1960. – С. 1 – 62

- 38 Эрмерс, Р. Оценки коэффициентов для ограниченных неисчезающих функций / Р. Эрмерс. – Helmond : Wibro Dissertatiedrukkerij, 1990.
- 39 Фридланд, С. Глобальные результаты в теории управления с приложениями к одновалентным функциям-связи / С. Фридланд, М. Шиффер. – Бык. Амер. Math. Soc., 1976. – С. 913 – 915
- 40 Фридланд, С. О областях коэффициентов одновалентных функций / С. Фридланд, М. Шиффер. – J. Anal. Математика., 1977. – С. 125 – 168
- 41 Гамкрелидзе, Р. В. Основы теории оптимального управления / Р. В. Гамкрелидзе. – Тбилиси : Тбилисский университет, 1977.
- 42 Годула, Ј. Логарифмические коэффициенты локально одновалентных функций / Ј. Годула, В. В. Старков. – М. : Ann. Univ. M. Кюри-Склодовская, Раздел A, 1989. – С. 9 – 13
- 43 Гох, С. С. О двухфункциональной гипотезе для одновалентных функций / С. С. Гох. – Компл. Вар., 1992. – С. 197 – 206
- 44 Гох, С. С. Точки опоры и двойные столбы / С. С. Гох. – Proc. Амер. Math. Soc., 1994. – С. 463 – 468
- 45 Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. – М. : Наука, 1966.
- 46 Гудман, Г. С. Одновалентные функции и оптимальное управление / Г. С. Гудман. – Стэнфордский университет, 1968.
- 47 Гутлянский, В. Я. Параметрическое представление одновалентных функций / В. Я. Гутлянский. – Докл. Акад. Наук СССР, 1970. – С. 750 – 753
- 48 Хейман, У. К. Мультивалентные функции / У. К. Хейман. – Издательство Кембриджского университета, 1958.
- 49 Горовиц, К. Коэффициенты неисчезающих функций в  $H^\infty$  / К. Горовиц. – : Израэль Дж. Математика., 1978. – С. 285 – 291

- 50 Hummel, J. A. Задача о коэффициентах для ограниченных неисчезающих функций / J. A. Hummel, A. C. Шейнберг, Л. Залкман. – J. Anal. Математика., 1977. – С. 169 – 190
- 51 Якубовский, З. О функциях, реализующих максимумы двух функционалов одновременно / З. Якубовский, В. Майчржак. – Сердика : Булг. Математика. Изд-во, 1984. – С. 337 – 343
- 52 Дженкинс, J. A. О проблеме Гронволла / J. A. Дженкинс. – Ann. Math., 1954. – С. 490 – 504
- 53 Дженкинс, J. A. Одновалентные функции и конформное отображение / J. A. Дженкинс. – Берлин : Springer-Verlag, 1958.
- 54 Каюмов, И. Р. Оценка логарифмических коэффициентов локально одновалентных функций / И. Р. Каюмов, В. В. Старков. – Берлин : В XVII Коллоквиуме Рольфа Неванлиинна, де Гройтер, 1996, – С. 239 – 245

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

(\* ::Package:: \*)

$$W[x1\_, x2\_, u\_] = \frac{\text{Exp}[I*u] * (-x1 - I*x2)}{(\text{Exp}[I*u] - x1 - I*x2)}$$

$$\begin{aligned} dx1dt[x1\_, x2\_, \psi1\_, \psi2\_, u\_] &= \\ \text{FullSimplify}[\text{ComplexExpand}[\text{Re}[W[x1, x2, u]]]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx2dt[x1\_, x2\_, \psi1\_, \psi2\_, u\_] &= \\ \text{FullSimplify}[\text{ComplexExpand}[\text{Im}[W[x1, x2, u]]]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H[x1\_, x2\_, \psi1\_, \psi2\_, u\_] &= \\ \text{FullSimplify}[\psi1*dx1dt[x1, x2, \psi1, \psi2, u] + \\ \psi2*dx2dt[x1, x2, \psi1, \psi2, u]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DPSI1[x1\_, x2\_, \psi1\_, \psi2\_, u\_] &= \\ -\text{FullSimplify}[D[H[x1, x2, \psi1, \psi2, u], x1]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DPSI2[x1\_, x2\_, \psi1\_, \psi2\_, u\_] &= \\ -\text{FullSimplify}[D[H[x1, x2, \psi1, \psi2, u], x2]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DH[x1\_, x2\_, u\_] &= \\ \text{FullSimplify}[D[(-\psi1 x1 - \psi2 x2 + (x1^2 + x2^2) \\ (\psi1 \text{Cos}[u] + \psi2 \text{Sin}[u])) \\ /(1 + x1^2 + x2^2 - 2 x1 \text{Cos}[u] - 2 x2 \text{Sin}[u]), u]] \end{aligned}$$

$$\sin(u) (-\psi1 x1^4 - 2 \psi1 x1^2 x2^2 + \psi1 x1^2 -$$

$$\begin{aligned}
& \text{psi1 } x2^4 - \text{psi1 } x2^2 + 2 \text{ psi2 } x1 \ x2) + \cos(u) \\
& (-2 \text{ psi1 } x1 \ x2 + \text{psi2 } x1^4 + 2 \text{ psi2 } x1^2 \ x2^2 + \text{psi2 } x1^2 + \\
& \text{psi2 } x2^4 - \text{psi2 } x2^2) + 2 \text{ psi1 } x1^2 \ x2 + 2 \text{ psi1 } x2^3 - \\
& 2 \text{ psi2 } x1^3 - 2 \text{ psi2 } x1 \ x2^2
\end{aligned}$$

$$A1*\sin[u] + B1*\cos[u] + C1 == 0$$

ClearAll[A1, B1, C1, tau]

(\*x1=0.8, x2=0, psi1=-1, psi2=3)\*)

$$A1[x1_, x2_, psi1_, psi2_] = (-\text{psi1 } x1^4 - 2 \text{ psi1 } x1^2 \ x2^2 + \text{psi1 } x1^2 - \text{psi1 } x2^4 - \text{psi1 } x2^2 + 2 \text{ psi2 } x1 \ x2)$$

$$B1[x1_, x2_, psi1_, psi2_] = (-2 \text{ psi1 } x1 \ x2 + \text{psi2 } x1^4 + 2 \text{ psi2 } x1^2 \ x2^2 + \text{psi2 } x1^2 + \text{psi2 } x2^4 - \text{psi2 } x2^2)$$

$$C1[x1_, x2_, psi1_, psi2_] = 2 \text{ psi1 } x1^2 \ x2 + 2 \text{ psi1 } x2^3 - 2 \text{ psi2 } x1^3 - 2 \text{ psi2 } x1 \ x2^2$$

$$\begin{aligned}
u1 &= \text{FullSimplify}[2(\sqrt{[Pi]}*1 + \text{ArcTan}[(A1[0.8, 0, -1, 3] + \\
&\text{Sqrt}[A1[0.8, 0, -1, 3]^2 + B1[0.8, 0, -1, 3]^2 - C1[0.8, 0, -1, 3]^2]) / \\
&(B1[0.8, 0, -1, 3] - C1[0.8, 0, -1, 3]))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u2 &= \text{FullSimplify}[2(\sqrt{[Pi]}*1 + \text{ArcTan}[(A1[0.8, 0, -1, 3] - \\
&\text{Sqrt}[A1[0.8, 0, -1, 3]^2 - B1[0.8, 0, -1, 3]^2 + C1[0.8, 0, -1, 3]^2]) / \\
&(B1[0.8, 0, -1, 3] - C1[0.8, 0, -1, 3]))]
\end{aligned}$$

$$\text{FullSimplify}[H[0.8, 0, -1, 3, u1]]$$

$$\text{FullSimplify}[H[0.8, 0, -1, 3, u2]]$$

```

u2max[x1_,x2_,psi1_,psi2_] = FullSimplify[2(\[Pi]*1+
ArcTan[((psi1[t] x1[t]^2-psi1[t] x1[t]^4+2 psi2[t] x1[t] x2[t]-
psi1[t] x2[t]^2-2 psi1[t] x1[t]^2 x2[t]^2-psi1[t] x2[t]^4)+
Sqrt[(psi1[t] x1[t]^2-psi1[t] x1[t]^4+2 psi2[t] x1[t] x2[t]-
psi1[t] x2[t]^2-2 psi1[t] x1[t]^2 x2[t]^2-psi1[t] x2[t]^4)^2+
(psi2[t] x1[t]^2+psi2[t] x1[t]^4-2 psi1[t] x1[t] x2[t]-
psi2[t] x2[t]^2+2 psi2[t] x1[t]^2 x2[t]^2+psi2[t] x2[t]^4)^2-
(-2 psi2[t] x1[t]^3+2 psi1[t] x1[t]^2 x2[t]-2 psi2[t] x1[t] x2[t]^2+2
psi1[t] x2[t]^3)^2])/((psi2[t] x1[t]^2+psi2[t] x1[t]^4-
2 psi1[t] x1[t] x2[t]-psi2[t] x2[t]^2+2 psi2[t] x1[t]^2 x2[t]^2+psi2[t] x2[t]^4)-(-2 psi2[t] x1[t]^3+2 psi1[t] x1[t]^2 x2[t]-2
psi2[t] x1[t] x2[t]^2+2 psi1[t] x2[t]^3)))]
(* FullSimplify[dx1dt[x1, x2, psi1, psi2, u2max[x1,x2,psi1,psi2]]]
FullSimplify[dx2dt[x1, x2, psi1, psi2, u2max[x1,x2,psi1,psi2]]]
FullSimplify[DPSI1[x1, x2, psi1, psi2, u2max[x1,x2,psi1,psi2]]]
FullSimplify[DPSI2[x1, x2, psi1, psi2, u2max[x1,x2,psi1,psi2]]]*

Points1 = {{0.018186240332942607`}, {0. `}}
Points2 = {{0.018186240332942607`}, {0. `}}
Points3 = {{0.0816567}, {0. `}}
Points4 = {{0.0816567}, {0. `}}
For[T = -1, T >= -8, T-=0.5,
clearAll[sol];

```

```
sol := NDSolve[
```

```
{
```

$$\begin{aligned}x1'[t] &= (-x1[t] + (x1[t]^2 + x2[t]^2) \\&\quad \text{Cos}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\&\quad (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - 2 x1[t] \\&\quad \text{Cos}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\&\quad 2 x2[t] \text{Sin}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x2'[t] &= (-x2[t] + (x1[t]^2 + x2[t]^2) \\&\quad \text{Sin}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\&\quad (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - 2 x1[t] \\&\quad \text{Cos}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\&\quad 2 x2[t] \text{Sin}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi1'[t] &= (\psi1[t] + (-2 \psi1[t] x1[t] + \\&\quad 2 \psi2[t] x2[t]) \text{Cos}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] + \\&\quad (-2 \psi2[t] x1[t] x2[t] + \psi1[t] (x1[t] - x2[t]) (x1[t] + x2[t])) \\&\quad \text{Cos}[2 u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - 2 (\psi2[t] x1[t] + \psi1[t] x2[t]) \\&\quad \text{Sin}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] + (2 \psi1[t] x1[t] x2[t] + \\&\quad \psi2[t] (x1[t] - x2[t]) (x1[t] + x2[t]))) \\&\quad \text{Sin}[2 u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\&\quad (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - 2 x1[t] \text{Cos}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\&\quad 2 x2[t] \text{Sin}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]])^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi2'[t] &= (\psi2[t] - 2 (\psi2[t] x1[t] + \psi1[t] x2[t]) \\&\quad \text{Cos}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] + (2 \psi1[t] x1[t] x2[t] + \\&\quad \psi2[t] (x1[t] - x2[t]) (x1[t] + x2[t]))) \\&\quad \text{Cos}[2 u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] + 2 (\psi1[t] x1[t] - \\&\quad \psi2[t] x2[t] + (2 \psi2[t] x1[t] x2[t] + \psi1[t] \\&\quad (-x1[t]^2 + x2[t]^2)) \text{Cos}[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]))\end{aligned}$$

```
 Sin[u2max[x1, x2, psi1, psi2]]]/(1+x1[t]^2+x2[t]^2-
2 x1[t] Cos[u2max[x1, x2, psi1, psi2]]-2 x2[t]
Sin[u2max[x1, x2, psi1, psi2]])^2,
```

```
x1[0]==0.8,
```

```
x2[0]==0,
```

```
psi1[0]==-1,
```

```
psi2[0]==T
```

```
},
```

```
{x1, x2, psi1, psi2},
```

```
{t, 0, 10},
```

```
Method -> {"StiffnessSwitching", "NonstiffTest" -> False}
];
```

```
AppendTo[Points1, {x1[3] /. First[sol], x2[3] /. First[sol]}];
```

```
(*Print[{x1[3] /. sol, x2[3] /. sol}]*)
```

```
]
```

```
For[T = 8, T >= 1, T-=0.5,
```

```
clearAll[sol];
```

```
sol := NDSolve[
```

{

$$\begin{aligned} x1'[t] = & (-x1[t] + (x1[t]^2 + x2[t]^2) \\ & \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\ & (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - 2x1[t] \\ & \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\ & 2x2[t] \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x2'[t] = & (-x2[t] + (x1[t]^2 + x2[t]^2) \\ & \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\ & (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - 2x1[t] \\ & \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\ & 2x2[t] \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi1'[t] = & (\psi1[t] + (-2\psi1[t]x1[t] + \\ & 2\psi2[t]x2[t]) \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] + \\ & (-2\psi2[t]x1[t]x2[t] + \psi1[t](x1[t] - x2[t])(x1[t] + x2[t])) \\ & \cos[2u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - 2(\psi2[t]x1[t] + \psi1[t]x2[t]) \\ & \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] + (2\psi1[t]x1[t]x2[t] + \\ & \psi2[t](x1[t] - x2[t])(x1[t] + x2[t])) \\ & \sin[2u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\ & (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - 2x1[t] \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\ & 2x2[t] \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]])^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi2'[t] = & (\psi2[t] - 2(\psi2[t]x1[t] + \psi1[t]x2[t])) \\ & \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] + (2\psi1[t]x1[t]x2[t] + \\ & \psi2[t](x1[t] - x2[t])(x1[t] + x2[t])) \\ & \cos[2u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] + 2(\psi1[t]x1[t] - \\ & \psi2[t]x2[t] + (2\psi2[t]x1[t]x2[t] + \psi1[t] \\ & (-x1[t]^2 + x2[t]^2)) \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]])) \\ & \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] / (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - \\ & 2x1[t] \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - 2x2[t] \\ & \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]])^2, \end{aligned}$$

```
x1[0]==0.8,
```

```
x2[0]==0,
```

```
psi1[0]==-1,
```

```
psi2[0]==T
```

```
},
```

```
{x1,x2,psi1,psi2},
```

```
{t,0,10},
```

```
Method -> {"StiffnessSwitching", "NonstiffTest" -> False}  
];
```

```
AppendTo[Points2,{x1[3]/.First[sol],x2[3]/.First[sol]}];
```

```
(*Print[{x1[3]/.sol,x2[3]/.sol}]*)
```

```
]
```

```
For[T=-1,T>=-8,T-=0.5,
```

```
clearAll[sol];
```

```
sol:=NDSolve[
```

```
{
```

```
x1'[t]==(-x1[t]+(x1[t]^2+x2[t]^2)
```

$$\begin{aligned} & \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] / \\ & (1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t] \\ & \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\ & 2 x2[t] \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x2'[t] = & (-x2[t]+(x1[t]^2+x2[t]^2) \\ & \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\ & (1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t] \\ & \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\ & 2 x2[t] \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi1'[t] = & (\psi1[t]+(-2 \psi1[t] x1[t]+ \\ & 2 \psi2[t] x2[t]) \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]+ \\ & (-2 \psi2[t] x1[t] x2[t]+\psi1[t] (x1[t]-x2[t]) (x1[t]+x2[t])) \\ & \cos[2 u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]-2 (\psi2[t] x1[t]+\psi1[t] x2[t]) \\ & \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]+(2 \psi1[t] x1[t] x2[t]+ \\ & \psi2[t] (x1[t]-x2[t]) (x1[t]+x2[t]))) \\ & \sin[2 u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\ & (1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t] \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]- \\ & 2 x2[t] \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]])^2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi2'[t] = & (\psi2[t]-2 (\psi2[t] x1[t]+\psi1[t] x2[t]) \\ & \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]+(2 \psi1[t] x1[t] x2[t]+ \\ & \psi2[t] (x1[t]-x2[t]) (x1[t]+x2[t]))) \\ & \cos[2 u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]+2 (\psi1[t] x1[t]- \\ & \psi2[t] x2[t]+(2 \psi2[t] x1[t] x2[t]+\psi1[t] \\ & (-x1[t]^2+x2[t]^2)) \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) \\ & \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / (1+x1[t]^2+x2[t]^2- \\ & 2 x1[t] \cos[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]]-2 x2[t] \\ & \sin[u2\max[x1, x2, \psi1, \psi2]])^2 , \end{aligned}$$

$$x1[0]==0.8 ,$$

```

x2[0]==0,
psi1[0]==1,
psi2[0]==T
},
{x1,x2,psi1,psi2},
{t,0,10},
Method -> {"StiffnessSwitching", "NonstiffTest" -> False}
];
AppendTo[Points3,{x1[3]/.First[sol], x2[3]/.First[sol]}];
(*Print[{x1[3]/.sol, x2[3]/.sol}]*)
]
For[T=8, T>=1, T-=0.5,
clearAll[sol];
sol:=NDSolve[
{
x1'[t]==(-x1[t]+(x1[t]^2+x2[t]^2)
Cos[u2max[x1,x2,psi1,psi2]])/
(1+x1[t]^2+x2[t]^2-2 x1[t]
Cos[u2max[x1,x2,psi1,psi2]]-

```

$$2 \ x2[t] \ \text{Sin}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]]],$$

$$\begin{aligned} x2'[t] = & (-x2[t] + (x1[t]^2 + x2[t]^2) \\ & \text{Sin}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\ & (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - 2 \ x1[t] \\ & \text{Cos}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\ & 2 \ x2[t] \ \text{Sin}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi1'[t] = & (\psi1[t] + (-2 \ \psi1[t] \ x1[t] + \\ & 2 \ \psi2[t] \ x2[t]) \ \text{Cos}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]] + \\ & (-2 \ \psi2[t] \ x1[t] \ x2[t] + \psi1[t] \ (x1[t] - x2[t]) \ (x1[t] + x2[t])) \\ & \text{Cos}[2 \ u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]] - 2 \ (\psi2[t] \ x1[t] + \psi1[t] \ x2[t]) \\ & \text{Sin}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]] + (2 \ \psi1[t] \ x1[t] \ x2[t] + \\ & \psi2[t] \ (x1[t] - x2[t]) \ (x1[t] + x2[t]))) \\ & \text{Sin}[2 \ u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / \\ & (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - 2 \ x1[t] \ \text{Cos}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]] - \\ & 2 \ x2[t] \ \text{Sin}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]])^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi2'[t] = & (\psi2[t] - 2 \ (\psi2[t] \ x1[t] + \psi1[t] \ x2[t]) \\ & \text{Cos}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]] + (2 \ \psi1[t] \ x1[t] \ x2[t] + \\ & \psi2[t] \ (x1[t] - x2[t]) \ (x1[t] + x2[t]))) \\ & \text{Cos}[2 \ u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]] + 2 \ (\psi1[t] \ x1[t] - \\ & \psi2[t] \ x2[t] + (2 \ \psi2[t] \ x1[t] \ x2[t] + \psi1[t] \\ & (-x1[t]^2 + x2[t]^2)) \ \text{Cos}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]])) \\ & \text{Sin}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]]) / (1 + x1[t]^2 + x2[t]^2 - \\ & 2 \ x1[t] \ \text{Cos}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]] - 2 \ x2[t] \\ & \text{Sin}[u2\text{max}[x1, x2, \psi1, \psi2]])^2, \end{aligned}$$

$$x1[0] == 0.8,$$

$$x2[0] == 0,$$

$$\psi1[0] == 1,$$

```

psi2[0]==T
},
{x1,x2,psi1,psi2},
{t,0,10},
Method -> {"StiffnessSwitching", "NonstiffTest" -> False}
];
AppendTo[Points4,{x1[3]/.First[sol], x2[3]/.First[sol]}];
(*Print[{x1[3]/.sol, x2[3]/.sol}]*)
]
plt1 = ListPlot[{Points1, Points2},
Joined->True,
PlotRange -> Full]
plt2 = ListPlot[{Points3, Points4},
Joined->True,
PlotRange -> Full]
(*Print[Points1,Points2,Points3,Points4]*)
```

plt3= ListPlot[

- $\{ \{ 0.018186240332942607^\circ, 0.^\circ \},$   
 $\{ 0.01819988721259982^\circ, -0.0032861745198986382^\circ \},$   
 $\{ 0.018150035635625304^\circ, -0.004261362072169963^\circ \},$   
 $\{ 0.01818308081283647^\circ, -0.004949289368649365^\circ \},$   
 $\{ 0.018179381821112187^\circ, -0.005440488784115197^\circ \},$   
 $\{ 0.018176124073179416^\circ, -0.005807656543520612^\circ \},$   
 $\{ 0.018173372356245762^\circ, -0.006091221052643722^\circ \},$   
 $\{ 0.018171049057779914^\circ, -0.0063162582458786195^\circ \},$   
 $\{ 0.01816906362160758^\circ, -0.006498922183408405^\circ \},$   
 $\{ 0.018167341378006307^\circ, -0.006650008631615047^\circ \},$   
 $\{ 0.018165825733086054^\circ, -0.0067769742700759875^\circ \},$   
 $\{ 0.018164474670100253^\circ, -0.006885120634901399^\circ \},$   
 $\{ 0.01816325693160415^\circ, -0.006978313366948118^\circ \},$   
 $\{ 0.018162149009682754^\circ, -0.007059433990294394^\circ \},$   
 $\{ 0.018161132960771792^\circ, -0.007130672439029182^\circ \},$   
 $\{ 0.018142511188364074^\circ, -0.007190272778218646^\circ \},$   
 $\{ 0.018186240332942607^\circ, 0.^\circ \},$

$\{0.01814251117697468^\circ, 0.007190272775051892^\circ\},$   
 $\{0.01816113296030316^\circ, 0.007130672438890455^\circ\},$   
 $\{0.018162149009766225^\circ, 0.0070594339903189435^\circ\},$   
 $\{0.0181632569315307^\circ, 0.006978313366926767^\circ\},$   
 $\{0.018164474669710756^\circ, 0.006885120634789002^\circ\},$   
 $\{0.018165825733765996^\circ, 0.00677697427026995^\circ\},$   
 $\{0.01816734137779947^\circ, 0.00665000863155692^\circ\},$   
 $\{0.018169063621388235^\circ, 0.006498922183347909^\circ\},$   
 $\{0.018171049058123466^\circ, 0.006316258245971035^\circ\},$   
 $\{0.018173372356491024^\circ, 0.006091221052707669^\circ\},$   
 $\{0.01817612407327933^\circ, 0.005807656543545573^\circ\},$   
 $\{0.018179381821511725^\circ, 0.005440488784209248^\circ\},$   
 $\{0.018183080813034148^\circ, 0.004949289368691843^\circ\},$   
 $\{0.01815003561926432^\circ, 0.004261362069222928^\circ\},$   
 $\{0.01819988721325401^\circ, 0.003286174519993552^\circ\}\}$  ,

Joined->True ,

```

PlotRange -> All ,
PlotStyle -> Red]
plt4 =
ListPlot [
{{0.0816567` , 0.`} ,
{0.020698048262029825` , -0.02378181233529464`} ,
{0.01874086494398789` , -0.01706045160393311`} ,
{0.018405456587168474` , -0.01428169601293776`} ,
{0.01826498625401527` , -0.012786148801645001`} ,
{0.018248125348641554` , -0.011895278141811752`} ,
{0.01823845048446985` , -0.011290061047240502`} ,
{0.018232082141084516` , -0.010854653835228776`} ,
{0.018224840631243456` , -0.01052610792234326`} ,
{0.018217102926908653` , -0.010269460575965172`} ,
{0.01821049850051784` , -0.010063808276687573`} ,
{0.018204798262292814` , -0.009895406018918348`} ,
{0.018199822036506743` , -0.00975501747233615`} ,

```

$$\{0.01819543403898186^\circ, -0.009636214845016412^\circ\},$$

$$\{0.018191530443972207^\circ, -0.00953439043858659^\circ\},$$

$$\{0.018188030691026265^\circ, -0.009446156955822344^\circ\},$$

$$(*\{0.0816567^\circ, 0.\circ\}, *)$$

$$\{0.018188030690509477^\circ, 0.009446156955621343^\circ\},$$

$$\{0.01819153044425481^\circ, 0.009534390438698052^\circ\},$$

$$\{0.01819543403841862^\circ, 0.0096362148447911^\circ\},$$

$$\{0.018199822036182728^\circ, 0.009755017472204438^\circ\},$$

$$\{0.018204798262127196^\circ, 0.009895406018849584^\circ\},$$

$$\{0.018210498500369102^\circ, 0.010063808276624451^\circ\},$$

$$\{0.018217102926874673^\circ, 0.010269460575950391^\circ\},$$

$$\{0.01822484063121412^\circ, 0.010526107922334261^\circ\},$$

$$\{0.018232082140564033^\circ, 0.010854653835058365^\circ\},$$

$$\{0.018238450484217048^\circ, 0.011290061047151622^\circ\},$$

$$\{0.018248125349302608^\circ, 0.011895278142067752^\circ\},$$

$$\{0.01826498625418162^\circ, 0.01278614880170449^\circ\},$$

```

{0.018405456586667285` , 0.014281696012712366`} ,
{0.018740864943924733` , 0.017060451603914988`} ,
{0.02069804826183299` , 0.023781812335221274`} ,
{0.0816567` , 0. `}
} ,
Joined -> True ,
PlotRange -> All ,
PlotStyle -> PointSize[Large]]
Show[plt3 , plt4 , PlotRange->Full]

```

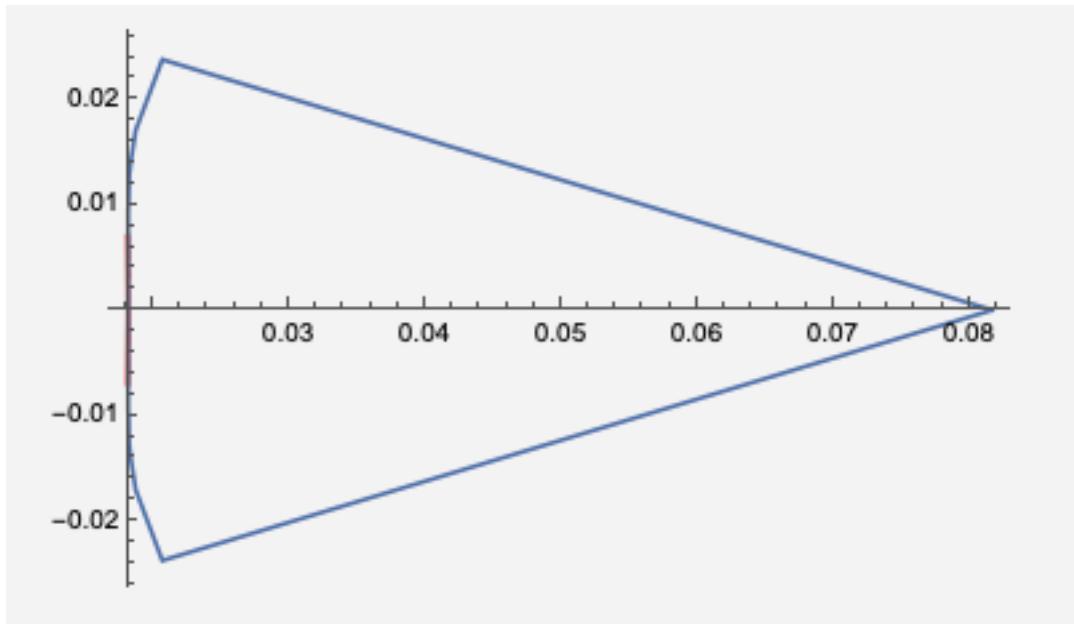


Рисунок 2.1 – Область достижимости уравнения Левнера-Куфарева