МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Взаимное изменение начальных коэффициентов для однолистных отображений полуплоскости

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 - **Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Бортника Романа Алексеевича

Научный руководитель доцент, к.ф.-м.н.		Захаров А.М.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой доцент, к.ф.-м.н., доцент		Разумовская Е.В.
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ **3**

1 Введение **4**

1.1 Основное содержание работы 6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ **15**

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ **16**

Приложение А **18**

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Обозначение 1. Будем обозначать через H множество всех голоморфных функций и однолистных в верхней полуплоскости $\prod_z^+ = \{z : Im > 0\}$ функцияй $w = f(z)$,принимающих значения в $\prod_w^+$ и имеющих "гидродинамическую"нормировку $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty}(f(z) - z) = 0$.

Обозначение 2. Будем обозначать через H_L совокупность всех функций $w = f(z)$ из класса H, имеющих конечный предел $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty} z(f(z) - z) = \{f\}_1$, где $\{f_1\}-$ полуось $(-\infty, 0]$ на классе H_L.

Обозначение 3. Для фикированного $c \leqslant 0$ будем обозначать через $H(c)$ множество функций класса H_L, для которых $\{f\}_1 = c$.

Обозначение 4. Будем обозначать через ∂A границу множества A.

1 Введение

Актуальность темы исследования. Вопрос о множествах значений коэффициентов и ситем коэффициентов в различных классах всегда занимал видное место в геометрической теории функций. В полной мере это относится к классам однолистных функций. Задача изучения экстремальных свойств класса H и его подклассов была поставлена П.П.Куфаревым в конце 60-х годов. Первые результаты в этом направлении опубликованы в [1] и [2], где для функций, однолистных в полуплоскости, разработан и применен вариационно-параметрический метод. Такой аналитический аппарат позволил добиться быстрого продвижения в решении экстремальных задач. В 1970 году И.А. Александров и В.В.Соболев [3] получили области значений систем функционалов $\{\ln \frac{Im\ f(z)}{Im\ z}, \ln|f'(z)|, \arg f'(z)\}$ на классе H и $\{f(z)\}$ на $H(c)$.

Цели и задачи работы. Основной целью работы является исследование множества $D(c)$ значений системы начальных коэффициентов $I(f) = \{c_2, c_3, c_4, c_5\}$ на классе $H_L(c)$.. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие задачи: 1. Нахождение граничной гиперповерхности $\partial D(c)$. 2. Нахождение множества $D(c)$.

Содержание работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований и одного приложения. Объем работы составляет 55 страниц.

В данной работе исследуется множество $D(c)$ значений системы начальных коэффициентов $I(f) = \{c_2, c_3, c_4, c_5\}$ на классе $H_L(c)$. Своеобразие решаемой задачи заключается в том, что разложение однолистных автоморфизмов полуплоскости в ряд Лорана осуществляется в полуокрестности бесконечно удаленной точки. Таким образом, коэффициенты разложения есть функционалы, опрделенные на границе задания функции. Применение во 2 разделе вариационного метода приводит к утверждению, что экстремальные функции, доставляющие конечные точки граничной гиперповерхности $\partial D(c)$, допускают представление интегралами обощенного уравнения Левнера

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\lambda}{u_1 - \omega} + \frac{1-\lambda}{u_2 - \omega},\ \omega(z,0) = z, \tag{1.1}$$

с непрерывными функциями $u_1(t), u_2(t)$ и с постоянной $\lambda, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Поиск множества $D(c)$ сводится к задаче оптимального управления, которая успешно решается в разделе 2. Выписывается параметрическое представление границы $\partial D(c)$.

В разделе 3 исследуются аналитические свойства гиперповерхности $\partial D(c)$, вполне аналогичные свойствам гиперповерхности $\partial D^c(z)$. Приводится алгоритм построены границы $\partial D(c)$, сводящийся к решению задачи Коши для четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. В силу неавтономности управляемой системы выделение первых интегралов не представляется очевидным. Часть граничной гиперповерхности, соответствующая скользящему режиму, выписывается явно. В заключение 4 раздела указывается множество значений системы коэффициентов $\{c_2, c_3, c_4\}$ на классе $H_L(c)$.

Методы исследования. При решении задач данной работы удается применить методику, основанную на комбинации вариационного метода и теории оптимального управления. Характеризуя эту методику, следует отметить главные идейные моменты. На первом этапе решения вариационная теорема устанавливает геометрическую связь характеристику характеристику экстремальный функций и позволяет представить последние интегралами обобщенного уравнения Левнера (1.1) с непрерывными функциями $u_1(t), u_2(t)$ и с постоянной $\lambda, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Такое представление оказывается возможным из-за аналитичности разрезов, а количество слагаемых правой части уравнения (1.1) определяется количеством концевых точек этих разрезов. На втором этапе эктремальная задача формулируется в терминах теории оптимального управления и применяется принцип максимума Л.С.Понтрягина[12], который оказывается не только необходимым, но и достаточным условием. Особо следует выделить тот факт, что поиск множества достижимости управляемой системы сводится к решению не краевой задачи, а задачи Коши.

Апробация работы. 16.11.2021 на научном семинаре кафедры математического анализа сделан доклад по материалам научно-исследовательской работы.

1.1 Основное содержание работы

Распишем более подробно второй этап, т.к. он имеет определяющее значение работы.

Пусть $\omega = \omega(z,t)$ является решением задачи Коши для дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{\omega - u} \tag{1.2}$$

с начальным условием

$$\omega(z,0) = z,\ z \in \prod_z^+ \tag{1.3}$$

H_L- класс, функции которого допускают в полуокрестности $K_R^+ = \{z : |z| > R, z \in \prod_z^+\}$ бесконечно удаленной точки разложение в ряд

$$f(z)) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots$$

с вещественными коэффициентами c_n тогда и только тогда, когда дополнение $\Delta = \{w = w = f(z), z \in \prod_z^+\}$ до $\prod_w^+$ ограничено.

$\omega = \omega(z,t)$ как функция переменного $z,\ z \in \prod_z^+$ принадлежит классу H_L, при любом $t \in [0, -c]$ и в окрестности бесконечно удаленной точки представима разложением

$$\omega(z,t) = z + \frac{2t}{z} + \frac{\{\omega(z,t)\}_2}{z^2} + \ldots + \frac{\{\omega(z,t)\}_n}{z^n} + \ldots$$

с вещественными коэффициентами $\{\omega(z,t)\}_n$. Введем следующие обозначения:

$$x_k(t) = \{\omega(z,t)\}_{k+1},\ k = 1,2,3,4,$$

Как следует из (1.2) координаты $x_k(t), k = 1,2,3,4,$ фазового вектора $X = X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1(u) = 2u,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g_2(t,u) = 2u^2 - 4t,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = g_3(t,X,v) = 2u^3 - 8ut - 2x_1, \tag{1.4}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = g_4(t,X,v) = 2u^4 - 12tu^2 - 4x_1u + 8t^2 - 2x_2,$$

с произвольным кусочно непрерывным управлением $u(t)$. Начальные условия (1.3) приводят к равенствам

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0. \tag{1.5}$$

Если обозначить вектор правых частей системы (1.4) через $G(t,X,u) = (g_1(u), g_2(t,u), g_3(t,X,u), g_4(t,X,u))^{,}T$ то (1.4) – (1.5) переписываются в векторной форме

$$\frac{dX}{dt} = G(t,X,u),\ X(0) = 0. \tag{1.6}$$

Множество $D(c)$значений системы коэффициентов $I(f)$ на классе $H_L(c)$ совпадает с множеством достижимости в момент $t = -c > 0$ управляемой системы (1.6) с произвольным кусочно непрерывным управлением $u(t)$. Согласно теореме 2 для нахождения конечных точек границы $\partial D(c)$ достаточно исследовать управляемую систему (1.6) и "овыпукленное" однопараметрическое семейство управляемых систем

$$\frac{dX}{dt}\lambda G(t,X,u_1) + (1-\lambda)G(t,X,u_2),\ X(0) = 0, \tag{1.7}$$

с непрерывными управлениями $u(t), u_1(t), u_2(t)$. Число $\lambda, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, служит параметром семейства. Следуя оптимизационному формализму и желая применить принцип максимума Понтрягина, введем множители Лагранжа $\Psi = \Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \psi_4(t))^T$ и составим функцию Гамильтона

$$H(X,\Psi,v) = \sum_{j=1}^{4} g_j(X,v)\psi_j(t) \tag{1.8}$$

Сопряженная гамильтонова система

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H(X, \Psi, v)}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 2\psi_3 + 4\psi_4 u$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = 2\psi_4 \tag{1.9}$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = 0$$

$$\frac{d\psi_4}{dt} = 0$$

после интегрирования записывается в виде:

$$\psi_1(t) = 2\xi_4 x_1(t) + 2\xi_3 t + \xi_1,$$

$$\psi_2(t) = 2\xi_4 t + \xi_2,$$

$$\psi_3 = \xi_3,$$

$$\psi_4 = \xi_4,$$

где $\xi_j, \ j = 1, 2, 3, 4$, координаты вектора $\Psi = \Psi(t)$ в начальный момент $t = 0, \Psi(0) = \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$. Выражения для $\psi - j, \ j = 1, 2, 3, 4$, можно подставить в (1.8). Тогда записаь функции Гамильтона примет вид

$$H(t, X, \xi, u) = 2u^4\xi_4 + 2u^3\xi_3 + 2u^2(\xi_2 - 4\xi_4 t) + 2u(\xi_1 - 2\xi_3 t) - 2(2\xi_2 t + \xi_3 x_1 + \xi_4 x_2)$$

Это многочлен четвертой степени по u. задача оптимального управления будет невырожденной, если многочлен стремится к $-\infty$ при $u \to \pm\infty$. Возникает естественное ограничение на последнюю координату вектора начальных данных $\xi_4 < 0$. Случай равенства $\xi = 0$ приводит к постановке другой оптимальной задачи, связанной с описание системы коэффициентов $\{c_2, c_3, c_4\}$, и должен рассматриваться отдельно.

Займемся поиском управления, максимизирующего функцию Гамильтона. В силу аналитичности функции H по u каждая из точек максимума удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial H(t, X, \xi, u)}{\partial u} = 0,$$

или

$$h(t, \xi, u) = u^3 + \frac{6u^2\xi_3}{8\xi_4} + \frac{4u(\xi_2 - 4t\xi_4)}{8\xi_4} + \frac{2\xi_1 - 4t\xi_3}{8\xi_4} \tag{1.10}$$

Следовательно, множество $U(t, \xi)$ точек максимума функции Гамильтона H содержит не более двух элементов. Обозначим через $\mathbb{M}_1$ множество допустимых значений (t, ξ), для которых функция H имеет единственный максимум, а через $\mathbb{M}_2-$ множество допустимых значений (t, ξ), для которых функция H имеет дв максимума. Положим

$$\mathbb{M}_1(t) = \{\xi : (t, \xi) \in \mathbb{M}_1\},$$

$$\mathbb{M}_2(t) = \{\xi : (t, \xi) \in \mathbb{M}_2\},$$

Пусть $\xi \in \mathbb{M}_m(0)$. Выделим $m, m = 1, 2$, непрерывных ветвей $u_j, j = \overline{1, m}$, алгебраической функции $u = u(t, \xi)$, определяемой уравнением (1.10) и начальными условиями $u_j(0, \xi) \in U(0, \xi), u_1(0, \xi) \neq u_2(0, \xi)$. Имеет место следующая теорема о взаимном изменении начальных коэффициентов.

Теорема 1.1. Граница $\partial D(c)$ множества значений системы коэффициентов $I(f)$ на классе $H_L(c)$ является объединением множеств Ω_1, Ω_2, не имеющих общих внутренних точек. Каждому из множеств $\Omega_m, m = 1, 2$, взаимно однозначно соответствует множество $\mathbb{M}_m(0)$ и справедливо параметрическое представление

$$\Omega_1 = \{X(c, \xi) : \xi \in \mathbb{M}_1(0), \xi_4 = -1\}, \tag{1.11}$$

$$\Omega_1 = \{X(c, \xi, \lambda) : \xi \in \mathbb{M}_2(0), \xi_4 = -1\}, 0 < \lambda < 1\}, \tag{1.12}$$

где $X(t,\xi)$ и $X(t,\xi,\lambda)$ суть решения задач Коши для управляемых систем(1.6) и (1.7) с непрерывными оптимальными управлениями $u_j = u_j(t,\xi), j=\overline{1,m}$.

Конкретизируем задаваемый теоремой (1.1) алгоритм посмтроения граничнйо гиперповерхности $\partial D(c)$. Из-за устойчивости неособого и скользящего режимов разделение множеств Ω_1, Ω_2 теоремы (1.1) и выбор непрерывной оптимальной ветви управляющей функции происходит при $t=0$. Уравнение (1.10), определяющее алгебраическую функцию $u=u(t,\xi)$ с учетом нормировки $\xi_4=-1$ в начальный момент принимает вид

$$u^3 - \frac{3\xi_3}{4}u^2 - \frac{\xi_2}{2}u - \frac{\xi_1}{4} = 0 \qquad (1.13)$$

В зависимости от выборочных коэффициентов это уравнение может меть либо три различных вещественных корня, либо один вещественный корень, либо кратные вещественные корни. Обозначим через G_1 и G_2 множества значений системы начальных параметров ξ_1,ξ_2,ξ_3, при которых уравнение уравнение (1.13) имеет соответственно один действительный корень нечетной кратности и три различных действительных корня. Применение метода Штурма[11] позволяет утверждать, что множество G_2 определяется неравенством

$$-\left(\frac{\xi_2\xi_3+6\xi_1}{8\xi_2+3\xi_3^2}\right)^2 - \frac{\xi_3}{2}\left(\frac{\xi_2\xi_3+6\xi_1}{8\xi_2+3\xi_3^2}\right) + \frac{\xi_2}{6} < 0 \qquad (1.14)$$

а множество G_1 является дополнением G_2 до пространства $\mathbb{R}^3$. Специальный вид правой части неравенства (1.14) приводит к другому описанию области G_2, более пригодному для практических целей:

$$\begin{cases} \xi_1 < \frac{\xi_2\xi_3}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{\xi_3^2}{4}+\frac{2\xi_2}{3}\right)\left(\frac{\xi_3}{2} - \sqrt{\frac{\xi_3^2}{4}+\frac{2\xi_2}{3}}\right) \\ \xi_1 > \frac{\xi_2\xi_3}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{\xi_3^2}{4}+\frac{2\xi_2}{3}\right)\left(\frac{\xi_3}{2} + \sqrt{\frac{\xi_3^2}{4}+\frac{2\xi_2}{3}}\right) \end{cases}$$

$$\xi_1 = \frac{\xi_2\xi_3}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{\xi_3^2}{4}+\frac{2\xi_2}{3}\right)\left(\frac{\xi_3}{2} - \sqrt{\frac{\xi_3^2}{4}+\frac{2\xi_2}{3}}\right) \qquad (1.15)$$

$$\xi_1 = \frac{\xi_2\xi_3}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{\xi_3^2}{4} + \frac{2\xi_2}{3}\right)\left(\frac{\xi_3}{2} + \sqrt{\frac{\xi_3^2}{4} + \frac{2\xi_2}{3}}\right) \tag{1.16}$$

соответственно.

Отметим, что при выборе в качестве параметров (ξ_1, ξ_2, ξ_3) точек поверхностей (1.15) – (1.16), удовлетворяющих неравенству $\xi_2 \neq -\frac{3}{8}\xi_3^2$, уравнение (1.13) имеет один просто корень и один корень кратности два. Точки поверхностей (1.15) – (1.16), удовлетворяющие равенству $\xi_2 = -\frac{3}{8}\xi_3^2$, индуцируют существование корня кратности три уравнения (1.13).

Выберем произвольный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, -1)$. Если $\xi \in G_1$, то в качестве оптимального управления $u = u(t, \xi)$ следует взять единственный вещественный корень нечетной кратности уравнения (1.10). В случае $\xi \in \partial G_1$ таким корнем является

$$u(t,\xi) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

где

$$p = -\frac{1}{16}(-3\xi_3^2 + 8\xi_2 + 32t)$$

$$q = -\frac{1}{32}(\xi_3^3 + 4\xi_2\xi_3 + 8\xi_1)$$

Если точка ξ лежит на границе ∂G_1 замкнутого множества G_1 и удовлетворяет неравенству $\xi_2 \neq -\frac{3}{8}\xi_3^2$, то

$$u = u(\xi) = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Наконец, при $\xi \in \partial G_1$ и $\xi_2 = -\frac{3}{8}\xi_3^2, u = u(\xi) = -\frac{\xi_3}{4}$. Интегрированием управляемой системы (1.4) с найденным оптимальным управлением получим точку на поверхности $\partial D(c)$.

Пусть теперь $\xi \in G_2$. В этом случае уравнение (1.13) имеет три различных действительных корня $u = y_1, u = y_2, u = y_3$,

$$y_1 = P + Q$$

$$y_2 = -\frac{P+Q}{2} + i\frac{P-Q}{2}\sqrt{3},$$
$$y_3 = -\frac{P+Q}{2} - i\frac{P-Q}{2}\sqrt{3}$$

где

$$P = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, Q = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Расположим их в порядке возрастания. Обозначим через u_1 наименьший, а через u_2- наибольший из этих корней. При выполнении неравенства

$$H(0,0,\xi,u_1(0,\xi)) > H(0,0,\xi,u_2(0,\xi))$$

в качестве оптимального следует взять управление $u = u_1(t,\xi)$, при выполнении обратного неравенства - управление $u = u_2(t,\xi)$. Интегрирование системы (1.4) с выбранным управлением, как и прежде, даст точку на искомой поверхности.

Равенство

$$H(0,0,\xi,u_1(0,\xi)) = H(0,0,\xi,u_2(0,\xi)) \tag{1.17}$$

побуждает учитывать одновременно два управления, что характерно для скользящего режима. Точка гиперповерхности $\partial D(c)$ получается интегрированием системы (1.7) с непрерывным оптимальным управлением $u = u_1(t,\xi), u = u_2(t,\xi)$ и с некоторым постоянным $\lambda, 0 < \lambda < 1$. Впрочем, в силу устойчивости скользящего режима, равенство

$H(t,X(t),\xi,u_1(t,\xi)) = H(t,X(t),\xi,u_2(t,\xi))$

должно сохраняться при любом t. Оно является первым интегралом управляемой системы и выписанное в конечный момент времени

$H(-c,X(-c),\xi,u_1(-c,\xi)) = H(-c,X(-c),\xi,u_2(-c,\xi))$

явно описывает часть границы $\partial D(c)$.

Заметим, что равенство (1.17) определяет поверхность, лежащую в области G_2.

Замечание 1.1. Если координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 вектора ξ удовлетворяет уравнениям (1.15) или (1.16), то оптимальное управление есть тождественная константа $u = const$.

Интегрируя систему (1.4) с таким управлением, немедленно получаем равенства

$$c_3 = \frac{c_2^2}{c_1} - \frac{c_1^2}{2}$$

и

$$c_5 = \frac{c_2^4}{c_1^3} - \frac{c_1^3}{2} - 3c_2^2,$$

согласующиеся с устновленными в [45] оценками

$$c_3 \leqslant \frac{c_2^2}{c_1} - \frac{c_1^2}{2} \tag{1.18}$$

и

$$\frac{c_2^4}{c_1^3} + \frac{c_1^3}{2} - 3c_2^2 \leqslant \sup c_5 \leqslant \frac{c_2^4}{c_1^3} + \frac{c_1^3}{2} - 2c_2^2 \tag{1.19}$$

Оценка (1.18) точная, а неравенства (1.1) приводят к точной оценке

$$c_5 \leqslant \frac{c_1^3}{2} \tag{1.20}$$

определяющей множество значений системы коэффициентов $\{c_1, c_5\}$. Равенство в (1.18) и (1.20) возможно лишь при

$$f_1(z) = \frac{c_2}{c_1} + \sqrt{\left(z - \frac{c_2}{c_1}\right)^2 + 2c_1}$$

и

$$f_2(z) = \sqrt{z^2 + 2c_1}$$

соответственно. Экскремальные функции $f_1(z), f_2(z)$ являются решением задачи Коши для уравнения Левнера с постоянными функциями $u_1 = \frac{c_2}{c_1}, u_2 = 0$ и отображают $\prod_z^+$ на верхнюю полуплоскость с одим вертикальным разрезом.

Как указывается в [45], семейство экстремальных функций в задаче описания системы коэффициентов $\{c_1, c_2, c_5\}$ не исчерпывается множество решений задачи Коши для уравнения Левнера с тождественно постоянной функцией $u = const$.

Завершим описание всех возможных систем, состоящих из пяти первых коэффициентов, построением множества $D^{'}(c)$ значением системы $\{c_2, c_3, c_4\}$ на классе $H_L(c)$. Как отмечалось в параграфе 8, такая экстремальная задача возникает при замене нормирующего условия $\xi_4 = -1$ на равенство $\xi_4 = 0$. В этом случае максимум функции Гамильтона

$$H(t, X, \xi, u) = 2u^3\xi_3 + 2u^2\xi_2 + 2u(\xi_1 - 2\xi_3 t) - 2(2\xi_2 t + \xi_3 x_1) \tag{1.21}$$

$\xi_3 \neq 0$, не достигается ни при каком конечном значении управления u. В силу необходимости принципа максимума можно утверждать, что коэффициент c_4 на классе $H_L(c)$ принимает любые значения при фиксированных c_2 и c_3. Другими словами, множество $D'(c)$ есть цилиндр по c_4, и задача его пстроения сводится к решенной ранее Т.Н.Селляховой и В.В.Соболевым [45] задаче описания множества значений системы $\{c_2, c_3\}$ на классе $H_L(c)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было успешно исследовано множество $D(c)$ значений системы начальных коэффициентов $I(f) = \{c_2, c_3, c_4, c_5\}$ на классе $H_L(c)$. Также было показано, что экстремальные функции, доставляющие конечные точки граничной гиперповерхности $\partial D(c)$, допускают представление интегралами обощенного уравнения Левнера (1.1). Был приведен алгоритм построения границы $\partial D(c)$, сводящийся к решению задачи Коши для четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Экстремальная задача была сформулирована в терминах теории оптимального управления. Решение было дано в виде множества достижимости некоторой управляемой системы. Перспективы развития данной темы очень огромны, т.к. дифференциальное уравнение Левнера активно используется при прогнозах коррозии металла, при прогнозах сбоя электротехники и в других не менее серьезных областях. Данная работа основывалась на вещественном управлении, в дальнейшем перспектива уйдет в комплексное управление, которое откроет еще больше возможностей для современной математики и физики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Куфарев, П.П. Об одном методе исследования экстремальный задач для функций, однолистных в полуплоскости / П.П.Куфарев, В.В. Соболев, Л.В. Спорышева. - Вопросы геометрической теории функций : Тр. Томского ун-та. - Томск, 1968. - Т. 200, вып. 5. - С. 142 - 164.

2. Соболев, В.В. К задаче об относительном экстремуме одного функционала на классе функций, однолистных в полуплоскости / В.В. Соболев. - Вопросы геометрической теорий функций : Тр. Томского ун-та. - Томск, 1968. - Т. 200, вып. 5. - С. 184 - 188.

3. Александров, И.А. Экстремальные свойства однолистных голоморфных функций с вещественными коэффициентами / И.А. Александров, В.И. Попов, - Сиб. матем. ж. - 1973. - Т. 14, № 5. - С. 915 - 926.

4. Селляхова, Т.Н. Исследование экстремальных свойств одного класса однолистных конформных отображений полуплоскости в себя / Т.Н. Селляхова, В.В. Соболев, - Некоторые вопр. соврем. теории функций. - Новосибирск, 1976. - С. 142 - 145.

5. Соболев, В.В. Параметрические представления для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости / В.В. Соболев. - Учен. зап. Кемеровского гос. пед. ин-та. - Кемерово, 1970. - Вып. 23. - С. 30 - 41.

6. Александров, С.Т. Теорема вращения для класса однолистных в полуплоскости функций, полуконформных в бесконечности / С.Т. Александров. - Тюмен. ун-т. - Тюмень, 1996. - 20 с. - Рукопись деп. в ВИНИТИ 18.04.86, № 2858 - В.

7. Piotrowska, Y. Extremal problems in some classes of univalent functions in a half-plane / Y. Piotrowska. - Ann.Polon.Math.- 1977. - v.34, No.2- P. 201 - 220.

8. Прохоров, Д.В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций / Д.В. Прохоров. - Матем. об. - 1990. - Т.181. № 12. - С. 1659 - 1677

9. Соболев, В.В. Параметрические представления для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости / В.В. Соболев. - Учен. зап. Кемеровского гос. пед. ин-та. - Кемерово, 1970 - Вып. 23. - С. 30 - 41.

10. Александров, С.Т. Экстремальные задачи в некоторых классакх однолистных в полуплоскости функций, имеющих конечный угловой вычет в бесконечности / С.Т. Александров, В.В. Соболев. - Сиб. матем. ж. - 1996. - Т. 27, № 2. - С. 3 - 13.

11. Корн, Г., Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн. - 5-е изд. - М.:Наука, 1984. - 832 с.

12. Понтрягин, Л.С. / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. - Математическая теория оптимальных процессов. - 4-е изд. - М.: Наука, 1983. - 392 с.

Приложение А

Программная реализация на языке программирования Python для построения сечения области D_2 плоскостями $\xi_2 = const$ и $\xi_3 = const$.

```
import pylab
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Button, Slider


def func(xi2, x):
    return xi2 * x / 6 - (x ** 2 / 4 + 2 * xi2 / 3) *
    (x / 2 - np.sqrt(x ** 2 / 4 + 2 * xi2 / 3))


def func2(xi2, x):
    return xi2 * x / 6 - (x ** 2 / 4 + 2 * xi2 / 3) *
    (x / 2 + np.sqrt(x ** 2 / 4 + 2 * xi2 / 3))


def addPlot(graph_axes, xi2):
    x = np.arange(-1000, 1000, 0.1)
    y1 = func(xi2, x)
    y2 = func2(xi2, x)
    graph_axes.plot(x, y1, x, y2)

    pylab.draw()


if __name__ == '__main__':
    def onButtonClicked(event):
```

```
    global slider_xi2
    global graph_axes

    addPlot(graph_axes, slider_xi2.val)


fig, graph_axes = pylab.subplots()
graph_axes.grid()
fig.subplots_adjust(left=0.1, right=0.95, top=0.95, bottom=0.4)
axes_button_add = pylab.axes([0.7, 0.05, 0.25, 0.075])
button_add = Button(axes_button_add, 'Добавить')
button_add.on_clicked(onButtonClicked)

axes_slider_xi2 = pylab.axes([0.05, 0.25, 0.85, 0.04])
slider_xi2 = Slider(axes_slider_xi2, label='xi2', valmin=-20, valmax

pylab.show()
```