МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Фреймы Парсеваля в линейной алгебре

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Гусева Артема Алексеевича

Научный руководитель
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент. ____________ А.М. Водолазов

Зав. кафедрой
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ____________ А.М. Водолазов

Саратов 2022 г.

Введение. В последние десятилетия наряду с классическим гармоническим анализом активно развивается негармонический, в котором большое внимание уделяется изучению фреймов - линейно-зависимых полных систем векторов. Фреймы нашли широкое применение в цифровой обработке сигналов и изображений, в кодировании и сжатии информации, в разработке фильтров для удаления разного рода шумов, в квантовой механике. Такой интерес к фреймам связан с отсутствием требования линейной независимости. С одной стороны, это позволяет строить фреймы сколь угодно большого объема и сколь угодно большой избыточности. Эти свойства фреймов имеют определенную ценность для многих прикладных задач, так как избыточность фрейма позволяет восстановить исходный сигнал, даже если при передаче некоторые из его коэффициентов разложения были потеряны, искажены или зашумлены. С другой стороны, любой элемент гильбертова пространства можно разложить по фрейму, причём, в общем случае, разложение не является единственным, а, следовательно, существует возможность выбирать коэффициенты разложения, налагая на них дополнительные ограничения.

Особое место занимают фреймы в помехоустойчивом кодировании. При этом известно, что оптимальными фреймами в задачах помехоустойчивого кодирования являются жёсткие фреймы, в частности, равномерные фреймы Парсеваля, поскольку они обеспечивают максимально возможное подавление шума при заданной избыточности.

Основное содержание работы. Рассмотрим N-мерное линейное пространство над полем вещественных чисел, которые будем обозначать $l^2_N(\mathbb{R})$. Введем в нем скалярное произведение и норму следующим образом:

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{N} x_k y_k, \quad ||x|| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ - элементы из $l^2_N(\mathbb{R})$.

Напомним, что система векторов $E = (e_1, e_2, \ldots, e_N)$ пространства $l^2_N(\mathbb{R})$ называются *базисом* пространства $l^2_N(\mathbb{R})$, если она состоит из линейно незавимых векторов и любой вектор x из $l^2_N(\mathbb{R})$ может быть единственным образом представлен в виде некоторой линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k, \tag{1}$$

где α_k - скалярные коэффициенты.

Базис $E = (e_1, e_2, \ldots, e_N)$ называется *ортонормированным*, если

$$< e_k, e_j >= \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j, \\ 1, & \text{если } k = j. \end{cases}$$

Заметим, что для ортонормированного базиса равенство (1) принимает вид

$$x = \sum_{k=1}^{N} < x, e_k > e_k$$

в силу того, что

$$< x, e_k >= \left\langle \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} < \alpha_j e_j, e_k >= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j < e_j, e_k >= \alpha_k$$

Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{M}, M \geqslant N$, векторов пространства $l_N^2(\mathbb{R})$ называется *полной*, если произвольный вектор $x \in l_N^2(\mathbb{R})$ может быть представлен линейной комбинацией векторов этой системы: $x = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \varphi_k$.

Введем понятие фрейма.

Пусть M и N — натуральные числа, причем $M > N$, и пусть J — конечное или бесконечное множество индексов.

Определение 1. Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ из $l_N^2(\mathbb{R})$ называется *фреймом* для пространства $l_N^2(\mathbb{R})$, если существуют положительные числа A и B такие, что

$$A||x||^2 \leqslant \sum_{k \in J} < x, \varphi_k > |^2 \leqslant B||x||^2 \tag{2}$$

для всех x из $l_N^2(\mathbb{R})$.

Числа A и B называются соответственно нижней и верхней границами фрейма. Они определяются неоднозначно, так как верхнюю границу B можно увеличивать, а нижнюю границу A — уменьшать. Поэтому инфинум по множеству всех верхних границ — это оптимальная верхняя граница фрейма, а супремум по множеству всех нижних границ — оптимальная нижняя граница фрейма.

Если оптимальная верхняя и нижняя границы совпадают, т.е. $A = B$, то фрейм называется *жестким.* Для него соотношение (2) переходит в равенство

$$\sum_{k\in J} < x, \varphi_k > |^2 = A||x||^2,$$

которое при $A = 1$ принимает форму равенства Парсеваля:

$$\sum_{k\in J} < x, \varphi_k > |^2 = ||x||^2. \tag{3}$$

Фреймы, для которых выполнено (3), называют фреймами Парсеваля.

Определение 2. Фрейм $\{\varphi_k\}_{k\in J}$ называется *равномерным*, если существует число β такое, что $||\varphi_k|| = \beta$ для любого $k \in J$.

Рассмотрим две леммы, связанных с фреймом Парсеваля.

Лемма 1. Отонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^N$ в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$ является равномерным фреймом Парсеваля в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Так как $\{e_k\}_{k=1}^N$ - ортонормированный базис, то для любого вектора $x \in l_N^2$ верно равенство Парсеваля

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{N} | < x, e_i > |^2.$$

Таким образом, получаем, что $\{e_k\}_{k=1}^N$ является фреймом Парсеваля в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$.

Лемма 2. Если $\{e_k\}_{k=1}^M$ - фрейм Парсеваля и $||e_k|| = 1$ для всех $k = 1, \ldots, M$, то $M = N$, и $\{e_k\}_{k=1}^N$ образует ортонормированный базис в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Предположим, что $x \in \overline{span}\{e_k\})^{\perp}$. Это означает, что $x \perp e_k$, и, используя условие, получаем

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{M} | < x, e_k > |^2 = 0.$$

Следовательно, $x = 0$, и, таким образом, полнота системы доказана.

По условию леммы $||e_k|| = 1$ для всех $k = 1, \dots, M$, т.е.

$$1 = ||e_k||^2 = \sum_{k=1}^{M} | < e_j, e_k > |^2 = \sum_{k \neq j} | < e_j, e_k > |^2 + 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \neq j} | < e_j, e_k > |^2 = 0,$$

и отсюда следует, что $< e_j, e_k >= 0$ для любого $j \neq k$. Получаем, что $e_k \perp e_j$ и, следовательно, $\{e_k\}_{k=1}^{N}$ образует ортонормированный базис в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим два примера, в которых возьмем системы векторов, и проверим, являются они фреймами или нет.

Пример 1. Рассмотрим пространство $l_2^2(\mathbb{R})$ и систему векторов

$$\varphi_1 = \{0; 1\},$$

$$\varphi_2 = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\},$$

$$\varphi_3 = \{\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\}.$$

Выясним, является ли эта система фреймом в пространстве $l_2^2(\mathbb{R})$. Для этого проверим выполнение неравенств (2). Возьмем произвольный вектор $x = \{x_1, x_2\}$.

$$\sum_{k=1}^{3} | < x, \varphi_k > |^2 = x_2^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 = \frac{3}{2}||x||^2.$$

Таким образом, получили, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^3$ - жесткий фрейм, с границей $A = \frac{3}{2}$. Фрейм, рассмотренный в этом примере, назывют «Мерседес-Бенц»-фреймом.

Пример 2. Рассмотрим пространство $l_3^2(\mathbb{R})$ и систему векторов

$$\varphi_1 = \{2; -3; 1\},$$

$$\varphi_2 = \{2; 3; 1\},$$

$$\varphi_3 = \{2; 0; -2\}.$$

Выясним, является ли эта система фреймом в пространстве $l_3^2(\mathbb{R})$. Для этого проверим выполнение неравенств (2). Возьмем произвольный вектор $x = \{x_1, x_2, x_3\}$.

$$\sum_{k=1}^{3} | < x, \varphi_k > |^2 = (2x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + (2x_1 + 3x_2 + x_3)^2 + (2x_1 - 2x_3)^2 =$$

$$= 12x_1^2 + 18x_2^2 + 6x_3^2.$$

Таким образом, получаем

$$6||x||^2 \leqslant \sum_{k=1}^{3} | < x, \varphi_k > |^2 \leqslant 18||x||^2.$$

Из определения (1) следует, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^3$ - фрейм с границами $A = 6$ и $B = 18$.

Конечно, можно было стандартным способом проверить линейную независимость векторов. Иногда(особенно при больших значениях N) предложенный способ проверки полноты системы может оказаться прдепочтительнее.

Рассмотрим два способа построения фреймов Парсеваля с произвольными нормами.

Первый подход для построения фреймов Парсеваля основан на следующей лемме М.А. Наймарка.

Лемма 3. Для любого фрейма Парсеваля $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ существует гильбертово пространство $H' \supset H$ и ортонормированный базис $\{e_k\} \subset H'$ такие, что $\varphi_k = Pe_k$, где $H' \to H$ - ортогональный проектор. Эта лемма описывает общий вид фреймов Парсеваля и показывает, что построение равномерных фреймов Парсеваля эквивалентно задаче описания векторов, сохраняющих равенство норм.

Второй подход основан на выделении фрейма Парсеваля из ортогональной матрицы и описан в следующей теореме.

Теорема 4. Рассмотрим прямоугольную $M \times N$ матрицу Δ. Эквивалентны следующие условия:

1) существует число $\Delta > 0$, что для любого $\overline{c}$ из $l_N^2(\mathbb{R})$ выполняется неравенство:

$$A \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \leqslant ||\Delta \overline{c}||^2;$$

2) столбцы матрицы Δ образуют базис в своей линейной оболочке $l_M^2(\mathbb{R})$;

3) строки матрицы Δ образуют фрейм в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$.

Далее введем понятие ε-почти фрейма Парсеваля в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$.

Зафиксируем ε на интервале $[0,1)$.

Определение 3. Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $l_N^2(\mathbb{R})$ называется ε-почти фреймом Парсеваля в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$, если существуют константы $A = 1 - \varepsilon$ и $B = 1 + \varepsilon$ такие, что

$$(1-\varepsilon)||x||^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} < x, \varphi_k > |^2 \leqslant (1+\varepsilon)||x||^2, \tag{4}$$

для любого $x \in l_N^2(\mathbb{R})$.

При $\varepsilon = 0$ равенство (4) принимает форму классического равенства Парсеваля(3).

Далее выясним, какой набор чисел является нормами фрейма Парсеваля $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$. Для этого введем ряд определений и утверждений.

Пусть опрделен оператор $A : H \to H$, где H - гильбертово пространство.

Определение 4. Вполне непрерывный(компактный) оператор A называется *ядерным*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}$.

Определение 5. *Спектральным следом* ядерного оператора A называется сумма его собственных значений λ_k, т.е. выражение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k$.

Определение 6. *Матричным следом* ядерного оператора A называется сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k) = Tr\,A$, где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в H, причем сумма ряда не зависит от выбора базиса.

Лемма 5. Если A - ядерный положительный оператор в H, то его матричный и спектральный следы принимают конечные значения, и справедливо равенство

$$Tr\,A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k)\,,$$

т.е. матричный след оператора совпадает с его спектральным следом.

Лемма 6. Пусть H - гильбертово пространство, R - его подространство, т.е. $R \subset H$, $dim\,R = r < \infty$, оператор $P : H \to R$ - оператор ортогонального проектирования. Тогда $Tr\,P = r$.

Доказательство. Оператор ортогонального проектирования компактен, т.к. он переводит любое ограниченно подмножество $M \subset H$ в ограниченное подмножество конечномерного пространства R, т.е. в предкомпактное множество.

Так как $P^2 = P$, то $\sqrt{\lambda_k}$ совпадает с λ_k для всех k. Оператор P действует в конечномерное пространство, поэтому у него конечное число ненулевых собственных значений, равных 1, и их число равно размерности подпространства, на которое действует оператор P, т.е. $dim\,R = r$.

Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k = \sum\limits_{k=1}^{r} 1 = r < \infty$ и, следовательно, P - ядерный оператор.

Так как

$$(Px, x) = \left(P^2x, x\right) = (P\,(Px)\,, x) = (Px, Px) \geqslant 0,$$

то P - положительный оператор.

Следовательно, по лемме 5 его матричный и спектральный следы совпадают, т.е.

$$Tr\,P = \sum_{k=1}^{\infty}(Pe_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k = r = dim\,R;$$

$$||P||_{HS}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}||Pe_k||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} < Pe_k, Pe_k >=$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} < P^2 e_k, e_k >= \sum_{k=1}^{\infty} < Pe_k, e_k >= dim\,R.$$

Теорема 7. Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - фрейм Парсеваля в пространстве $l_N^2(\mathbb{R})$ и $||\varphi_k|| = a_k$ для $k = 1, 2, \ldots$, то $a_k^2 \leqslant 1$ для $k = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = N$.

Доказательство. По лемме 3 любой фрейм Парсеваля $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $l_N^2(\mathbb{R})$ можно получить из ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{R})$ с помощью оператора ортогонального проектирования $P : l^2(\mathbb{R}) \to l_N^2(\mathbb{R})$, т.е. $\varphi_k = Pe_k$ для $k = 1, 2, \ldots$, поэтому

$$a_k^2 = ||\varphi_k||^2 = ||Pe_k||^2 \leqslant ||e_k||^2 = 1$$

для $k = 1, 2, \ldots$.

Вычислим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}||\varphi_k||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}||Pe_k||^2 = ||P||_{HS} = dim\,l_N^2(\mathbb{R}) = N.$$

Данная теорема показывает, что нормы фрейма Парсеваля, состоящего из бесконечного числа элементов, в $l_N^2(\mathbb{R})$ удовлетворяют тому же условию, что и нормы фрейма Парсеваля, состоящего из конечного числа элементов, в $l_N^2(\mathbb{R})$.

Заключение. В данной работе были рассмотрены такие математические объекты, как фреймы. Были представлены определения фрейма, фрейма Парсеваля, ε - почти фрейма Парсеваля и другие определения, связанные с понятием фрейма, были показаны их свойства. Приводились примеры, в которых устанавливалось, являются данные системы векторов фреймами или нет. Также, были рассмотрены два способа построения фрейма с произвольными нормами.

Несмотря на то, что построение произвольных фреймов Парсеваля не является сложным, задача построения равномерных фреймов Парсеваля является отнюдь не тривиальной. Поиск новых методов решения этой задачи является актуальным на текущий момент.