МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Некооперативные решения в играх n лиц

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Железновой Анжелики Глебовны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________________ В.Б. Поплавский
подпись, дата

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Саратов 2022

Введение. Основным объектом изучения теории игр являются математические модели принятия решений в условиях конфликта. Под конфликтом понимается взаимодействие нескольких участников, называемых в теории игр *игроками*, каждый из которых принимает решение, преследуя собственные интересы. Однако результат принимаемого решения не может быть полностью предопределен действием (стратегией) принимающего решение участника, а зависит от стратегий всех взаимодействующих лиц (игроков).

Наиболее простыми моделями подобных конфликтов являются салонные игры (например, карты или шахматы). Действительно, в такой игре выигрыш каждого участника зависит не только от его поведения (стратегии), но и от поведения противника. В каждом состязании (спортивном, экономическом или социальном) мы можем найти стратегический (поведенческий) аспект и тем самым проанализировать его с теоретико-игровых позиций.

Основной целью теории игр является выработка рекомендаций для наилучшего в некотором смысле поведения игроков в конфликте, то есть выявления для каждого из них «*оптимальной стратегии*».

В данной дипломной работе рассматривается такие игры, в которых каждый игрок принимает решение независимо от других игроков (изолированно), не участвуя ни в каких переговорах и соглашениях с другими игроками. Игры такого класса называются бескоалиционными. Бескоалиционная игра называется антагонистической, если в ней участвуют 2 игрока с противоположными интересами.

Игра с нулевой суммой – это игра, в которой сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю. Игры двух игроков с нулевой суммой относятся к классу антагонистических игр. При этом выигрыш одного игрока равен, естественно, проигрышу другого игрока.

Матричная игра — конечная игра двух игроков с нулевой суммой. Таким образом, в матричной игре участвуют два игрока, множество стратегий каждого из игроков конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Бескоалиционные игры с постоянной суммой можно понимать, например, как модели экономических процессов, в которых отсутствуют производство и потребление, а происходит только обмен имеющимися полезностями и их перераспределение.

Основное содержание работы. Общее описание теоретико-игровых моделей. $\Gamma = (I, (X_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I})$,

где $I = \{1, ..., n\}$ - множество игроков;

X_i множество стратегий игрока $i \in I$;

$f_i : X \to R$ функция выигрыша игрока $i \in I$;

$X = \prod_{i \in I} X_i$ множество ситуаций игры.

Антагонистические игры. Конечная антагонистическая игра называется матричной. Такая игра задается платежной матрицей выигрышей.

A = (a_{ij}), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, где n – число стратегий 1-го игрока, m – число стратегий 2-го игрока. Такая игра далее обозначается Γ_A

В платежной матрице элемент a_{ij} — это выигрыш игрока 1 в ситуации, когда игрок 1 выбирает свою i-ю стратегию, а игрок 2 свою j-ю стратегию, и одновременно, значения проигрыша 2-го игрока.

В основу анализа антагонистических игр положен принцип гарантированного выигрыша, который состоит в следующем.

Для определения оптимальных стратегий в матричной игре применим принцип максимального гарантированного результата при наихудших условиях. Он заключается в следующем.

Игрок 1 рассчитывает получить максимальный выигрыш при наихудших условиях. Значит, при выборе отвечающей этим условиям своей чистой i-й стратегии (в платежной матрице этой стратегии соответствует i-я строка выигрышей) он должен выбрать гарантированный выигрыш в наихудших условиях, то есть наименьшее значение своего выигрыша a_{ij}, которое обозначим α_i.

$$\alpha_i = \min_j a_{ij},\ i = 1, \dots, n$$

Для того, чтобы этот гарантированный выигрыш был максимальным, нужно из всех α_i выбрать наибольшее значение.

Обозначим его v_1 и назовем *чистой нижней ценой игры* («максимином»):

$$v_1 = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$$

Максиминная стратегия 1-го игрока определяет ту строку платежной матрицы, для которой гарантированный выигрыш равен v_1.

Какие бы стратегии ни применял игрок 2, игрок 1 максиминной чистой стратегией гарантирует себе выигрыш, который не меньший нижней цены игры, т.е. не меньший, чем v_1 независимо от выбора стратегии игроком 2. Таково оптимальное поведение игрока 1 в соответствие с принципом максимина.

Перейдем теперь к рассмотрению оптимального поведению игрока 2. Игрок 2 стремится уменьшить свой проигрыш. Поэтому при каждой j-й чистой стратегии он отыскивает величину своего максимального проигрыша β_j в каждом j-м столбце:

$$\beta_j = \max_i a_{ij},\ j = 1, \dots, m$$

Из всех своих n чистых стратегий игрок 2 находит такую, при которой получит минимальный проигрыш, то есть игрок 2 определяет v_2 – чистую верхнюю цену игры («минимакс»):

$$v_2 = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

Т.е. игрок 2 за счет указанного выше выбора своих чистых стратегий не допустит, чтобы его проигрыш был больше, чем v_2. Таким образом, минимаксной стратегии 2-го игрока отвечает столбец матрицы, которому соответствует элемент v_2, при ее выборе игрок 2 обеспечит себе проигрыш, не больший, чем значение верхней цены игры, т.е. не больший, чем v_2 независимо от стратегии игрока 1.

Для нижней и верхней цены выполняется следующее правило.

Правило 1. *В любой матричной игре нижняя цена не превосходит верхней цены игры, т.е. выполняется неравенство*

$$v_1 \leq v_2.$$

Если нижняя и верхняя цена матричной игры совпадают, т.е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v.$$

то число $v = v_1 = v_2$ называется *чистой ценой игры* .

Определение 1. Пусть $Г_A$ — матричная игра с платежной матрицей $A = (a_{ij})$ $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$. Ситуация (i_o, j_o) называется седловой точкой в игре $Г_A$, если при всех $i = 1, \dots, n, j = l, \dots, m$ выполняется двойное неравенство:

$$a_{ijo} \leq a_{iojo} \leq a_{ioj} \qquad (1.1)$$

Центральной теоремой теории матричных игр в чистых стратегиях является теорема:

Теорема 1.1 (о связи седловой точки с ценой игры)

1. *Пусть* (i_0, j_0) — *седловая точка игры* $Г_A$, *тогда:*

а) i_0 *является максиминной стратегией игрока 1;*

б) j_0 *является минимаксной стратегией игрока 2;*

в) *игра* $Г_A$, *имеет цену,* причем исход в седловой точке совпадает с *ценой игры* $a_{iojo} = v$.

2. *Пусть игра* $Г_A$ имеет цену v. Тогда любая ситуация (i_0, j_0) где i_0 — *максиминная* стратегия игрока 1, а j_0 — минимаксная стратегия игрока 2, — *является* седловой точкой игры $Г_A$.

Смешанные стратегии. Для матричной игры наличие цены игры эквивалентно наличию седловой точки. В этом случае игра имеет решение в чистых стратегиях, причем оптимальной стратегией игрока 1 является его максиминная стратегия, а оптимальная стратегия игрока 2 – его минимаксная стратегия. Но не всякая матричная игра имеет цену. Поэтому в теории матричных игр были введены смешанные стратегии.

Будем обозначать через Γ_A матричную игру с платежной матрицей $A = |a_{ij}|$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$. Множество смешанных стратегий игрока 1 есть множество вероятностных векторов $S_n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$, а множество смешанных стратегий игрока 2 есть множество вероятностных векторов $S_m = \{ y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m: y_i \geq 0, \sum_{j=1}^{m} y_j \geq 0 \}$.

Далее по матричной игре Γ_A построим новую игру $\overline{\Gamma}_A$, в которой множеством стратегий игрока 1 является множество вероятностных векторов S_n, множеством стратегий игрока 2 — множество вероятностных векторов S_m, а функция выигрыша определяется равенством:

$$F_A(x,y) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (x_i y_j) a_{ij} \qquad (1.4)$$

Основным результатом теории матричных игр является:

Теорема 1.2 (теорема фон Неймана)

1. Для матричной игры с любой матрицей А величины

$$\max_x \min_y F_A(x,y) \text{ и } \min_y \max_x F_A(x,y)$$

существуют и равны между собой, совпадающие величины, обозначающиеся далее v_A .

2.Существует, по крайней мере, одна ситуация в смешанных стратегиях (x^0, y^0), для которой выполняется соотношение:

$$\min_y F_A(x^0, y) = \max_x F_A(x, y^0) = F_A(x^o, y^o) = v_A$$

Следствие 1. Любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Бескоалиционная игра.

Определение 4. Пусть Г — игра n лиц, заданная в нормальной форме.

Ситуация $x^0 = (x^0{}_1, . . . , x^0{}_n) \in X$, называется *ситуацией равновесия* в игре Г (*равновесием в смысле Нэша*), если для всех $i \in I,\ x_i \in X_i$ выполняется:

$$f_i(x^0 \| x_i) \le f_i(x^0)\ . \tag{2.3}$$

Бескоалиционная игра Г называется биматричной, если множество I в ней состоит из двух игроков (т.е. I = {1, 2}). И множества стратегий игроков конечны.

Если составить две таблицы , в которых входы по строкам будут соответствовать стратегиям игрока 1, а входы по столбцам –стратегиям игрока 2, то в этих таблицах клетки будут соответствовать ситуациям игры. Если заполнить клетки первой из таблиц значениями функции выигрыша игрока 1, а клетки второй таблицы – значениями функции выигрыша игрока 2, то мы получим пару матриц полностью описывающих игру. Эти матрицы называются матрицами выигрышей в биматричной игре.!

В ситуации в смешанных стратегиях (x, y) исходом для первого игрока будет случайная величина$\xi_1 = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ x_i y_j \end{bmatrix}$, а для игрока 2 — случайная величина $\xi_2 = \begin{bmatrix} b_{ij} \\ x_i y_j \end{bmatrix}$.

При построении смешанного расширения игры $\Gamma_{(A,B)}$ в качестве выигрышей игроков 1 и 2 берутся математические ожидания этих случайных величин

$$F_A(x,y) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (x_i y_j) a_{ij}\ , \quad F_B(x,y) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (x_i y_j) b_{ij}\ .$$

В результате получается новая игра игроков 1 и 2, в которой множествами их стратегий будут множества вероятностных векторов S_n *и* S_m соответственно, а функции выигрыша игроков определяются выше представленными равенствами. Построенная игра называется смешанным расширением игры $\Gamma_{(A,B)}$.

Ситуация $(x^\circ, y^\circ) \in S_n \times S_m$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях тогда и только тогда, когда при любых $x \in S_n$, $y \in S_m$ выполняется неравенства

$$F_A(x, y^\circ) \le F_A(x^\circ, y^\circ), \quad F_B(x, y^\circ) \le F_B(x^\circ, y^\circ).$$

В работе доказана теорема, обеспечивающую реализуемость принципа равновесия в смешанных стратегиях для класса биматричных игр.

Теорема 2.1 (теорема Нэша). Всякая биматричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Ситуации, оптимальные по Парето. Переговорное множество. Под исходом биматричной игры понимается упорядоченная пара выигрышей игроков 1 и 2.

Пусть (c,d), (a,b) – два исхода биматричной игры.

Говорят, что исход (c, a) доминирует исход (d, b) по Парето, если $c \ge a$, $d \ge b$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Определение 5. Недоминируемые по Парето исходы называются сходами оптимальными по Парето, а их множество – Паретовский оптимум.

Ситуация игры называется оптимальной по Парето, если игроки не могут совместными усилиями увеличить выигрыш кого-либо из них, не уменьшив при этом выигрыш кого-либо другого.

Определение 7. Переговорное множество определяется как множество тех точек множества Парето, которые не уменьшают гарантированные выигрыши игроков.

Такое же понятие можно ввести для смешанного расширения биматричной игры. В этом случае множество всех исходов игры геометрически представляется многоугольником на плоскости (см. пример).

Пример 2.3 - относится к оптимальным по Парето исходам в смешанном расширении биматричной игры!

Определим гарантированные выигрыши двух игроков биматричной игры. Построить переговорное множество игры, заданной двумя матрицами.

	1	2
1	1	8
2	5	-3

Матр. выигр. игр 1

	1	2
1	4	2
2	2	4

Матр. выигр. игр 2

Нанесем на координатную плоскость ситуации игры, а именно выигрыши двух игроков, точки с координатами (1, 4), (5, 2), (–3, 4), (8, 2) (рис. 1):

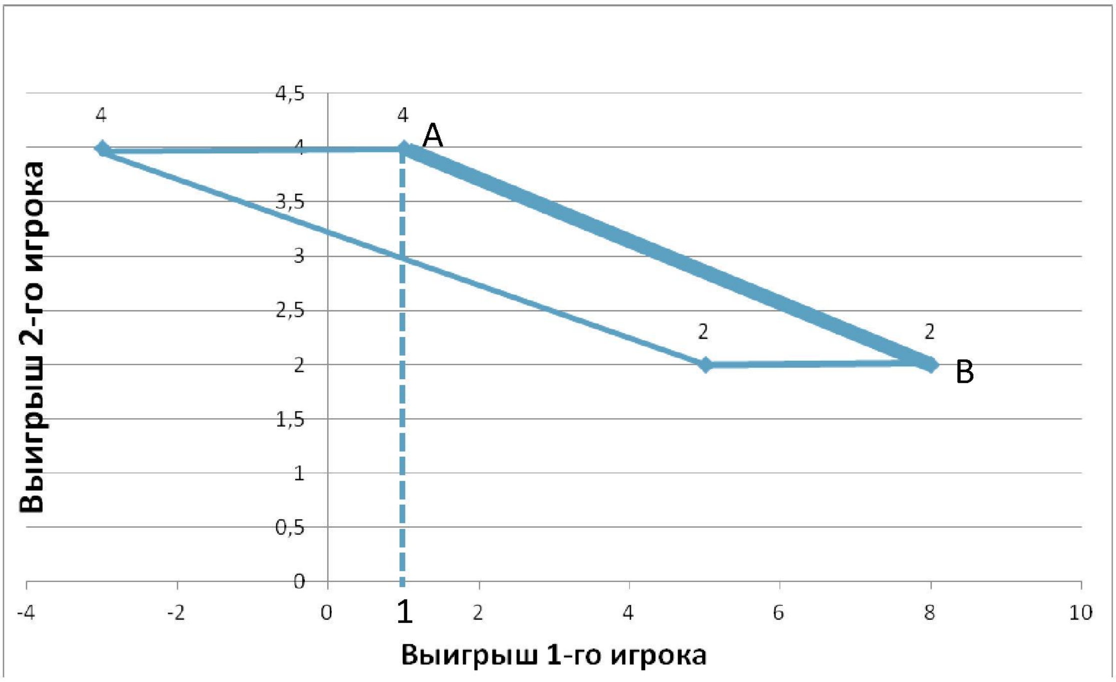

Рис. 1. Переговорное множество игры

Определим множество оптимальных стратегий по Парето как верхняя правая огибающая области – это прямая АВ.

Из графика видно, что гарантированный выигрыш 1-го игрока равен 1, а гарантированный выигрыш 2-го игрока равен 2. Это подтверждается тем, что в платежных матрицах каждого игрока существует ситуация равновесия.

Переговорное множество совпадет с множеством оптимальных стратегий по Парето – это прямая АВ.

Игры n лиц. Структуры на множествах стратегий. В этом разделе для игр n лиц рассмотрены дополнительные структуры на множествах стратегий игроков.

Определение 3. Бескоалиционная игра $\Gamma = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$, называется топологической игрой, если каждое из множеств стратегий x_i $(i \in I)$ является топологическим пространством.

В этом случае можно определить топологию на множестве ситуаций игры. А именно, базой этой топологии являются всевозможные декартовы произведения открытых подмножеств стратегий игроков.

Определение 6. Бескоалиционные игры $\Gamma = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$ и $\Gamma' = \langle I, \{X'_i\}_{i \in I}, \{H'_i\}_{i \in I} \rangle$ (3.1), называются *аффинно-эквивалентными*, если существуют такие положительные a_i, любые вещественные c_i $(i \in I)$, что для любой ситуации $x \in X$ и игрока $i \in I$ имеет место :

$$H'_i(x) = a_i H_i(x) + c_i . \tag{3.3}$$

В заключение работы введены и доказаны 3 свойства аффинной эквивалентности игр:

Теорема 3.1

1.Рефлексивность: $\Gamma \sim \Gamma'$.

2.Симметрия: $\Gamma \sim \Gamma'$ следует $\Gamma' \sim \Gamma$.

3.Транзитивность: из $\Gamma \sim \Gamma'$ и $\Gamma' \sim \Gamma''$ следует $\Gamma \sim \Gamma''$.

В приложении приведены примеры построения теоретико-игровых моделей.

Заключение. Таким образом, выполненная работа показывает, что проблемы принятия решений в условиях конфликта допускают исследование в рамках математики. Это исследование происходит с помощью математической модели, которая называется игрой. Наиболее простой случай принятия решения несколькими сторонами получается тогда, когда решения принимаются независимо и без обмена информацией; такая игра называется бескоалиционный, а соответствующей ей тип решения игры носит название некооперативного.

Для бескоалиционных игр основным принципом оптимальности является принцип равновесия, предложенный американским математиком Дж. Нэшем; в случае антагонистической игры принцип равновесия превращается в принцип седловой точки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Воробьев Н. Н., Теория игр для экономистов.- М.: «Наука», 1985.-24 С

2. Воробьев Н. Н., Основы теории игр-М.: «Высшая школа», 1984. 45 С

3. Розен В.В., Математические модели принятия решений в экономике М.: Книжный дом «Университет» , 2002.-214 С.

4. Колемаев В.А., Математическая экономика-М.: ЮНИТ, 1998.-56 С.

5. Мулен Э., Теория игр с примерами из математической экономики: Пер с франц.— М . Мир, 1985 .— 200 С.

6. Воробьёв Н.Н., Бесконечные антагонистические игры. — М. : 1963, 505 С.

7. Кремлев, А. Г., К79 Основные понятия теории игр : учебное пособие / — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016 — 144 С.

8. Мазалов В. В., Математическая теория игр и приложения: Учебное пособие. — 2"е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань»,2016 — 448 С.

9. Петросян Л. А. и др. ,Теория игр - М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. - 304 С.