

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра геометрии

**Односторонние поверхности**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Черкасовой Екатерины Сергеевны

Научный руководитель  
доцент, к.п.н.

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

А.В. Букушева

Зав. кафедрой  
к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

С.В. Галаев

Саратов 2022

**Введение.** Интерес к нетривиальным поверхностям в архитектуре и дизайне проявился в полной мере в конце XX века. Популярность творений Нормана Фостера и Захри Хадид обусловлена применением в геометрической схеме и оболочках зданий топологических поверхностей. Развитие технологий информационного моделирования (BIM) ускоряет процесс проектирования и строительства сложных поверхностей. Стремление выработать наиболее оптимальное соотношение прочности и затраченного материала подводит к оценке перспектив использования, в частности, односторонних поверхностей. Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак, римская поверхность, поверхность Боя, бутылка (или поверхность) Клейна. Например, поверхность Клейна может быть использована как при проектировании сооружений с большим внутренним свободным пространством, так и объектов, пространство которых задает направление траектории развития. Функциональное назначение зданий с поверхностью Клейна — выставочные и торговые павильоны, в которых обтекаемая форма сооружения обеспечивает оптимальную организацию потоков большого количества людей. Инновационные формы архитектурных и дизайнерских решений стало возможным воплотить с развитием технологий моделирования. Исследование односторонних поверхностей, параметризация и создание библиотек различных поверхностей, для использования в компьютерном моделировании, является актуальной задачей сегодняшнего этапа развития технологий проектирования.

Цель бакалаврской работы — исследование односторонних поверхностей. Для достижения цели поставлены следующие задачи:

- рассмотреть определение и примеры односторонних поверхностей;
  - модели проективной плоскости (римская поверхность, поверхность Боя и скрещенный колпак).
  - визуализировать односторонние поверхности в Wolfram Mathematica.
- Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников. Во введении описана актуальность работы, сформулирована цель и поставлены задачи работы. В первом разделе определяются

односторонние поверхности. Во втором разделе исследуется лист Мебиуса. В третьем разделе посвящен обмотке тора и поверхностям: лист Мебиуса, бутылка Клейна, скрещенный колпак. В пятом разделе рассматриваются поверхность переноса и односторонние поверхности. С использованием Wolfram Mathematica строятся рассматриваемые поверхности в шестом разделе.

**Основное содержание работы.** Исследуем односторонние поверхности, рассмотрим определения и примеры, изучим модели проективной плоскости.

Поверхность бывает односторонней и двусторонней.

Приведем пример простой односторонней поверхности - лист Мебиуса.

В евклидовом пространстве  $E^3$  рассмотрим линейчатую поверхность  $M$ :

$$r(u, v) = \rho(v) + ul(v), \quad (1)$$

где  $\rho(v) = Re(v) = Re(\cos(v), \sin(v), 0)$  - направляющая окружность радиуса  $R$ ;  $l(v)$  - орт образующая прямой.

Будем предполагать, что прямые ортогонально пересекают окружность. Обозначим через  $\varphi(v)$  угол между плоскостью окружности и прямой. Тогда

$$l(v) = \cos(\varphi)e(v) + \sin(\varphi)k,$$

где  $k = (0, 0, 1)$ .

Если при этом  $\varphi = v/2$ , то  $l(0) = -l(2\pi)$ , прямые  $r(u, 0), r(u, 2\pi)$  "склеиваются". Имеем лист Мебиуса  $M \subset E^3$ . Итак,

$$l(v) = \cos(\frac{v}{2})e(v) + \sin(\frac{v}{2})k, \quad (2)$$

$$r(u, v) = (R + u\cos(\frac{v}{2}))e(v) + u\sin(\frac{v}{2})k, \quad (3)$$

или

$$r(u, v) = ((R + u\cos(\frac{v}{2}))\cos(v), (R + u\cos(\frac{v}{2}))\sin(v), u\sin(\frac{v}{2})). \quad (4)$$

Рассмотрим лист Мебиуса (4).

Полагаем  $v \in [-\pi, \pi]$ , и  $u \in [-a, a]$ . При  $u = \{-a, a\}$  имеем край поверхности, склеенный из двух кривых. Направляющая окружность есть средняя кривизна. Тот же край можно получить, если положить  $v \in [-2\pi, 2\pi]$ ,  $u = a$ .

Исследуем, как меняется вид поверхности при изменении высоты  $h = 2a$  листа Мебиуса.

Край гомеоморфен окружности и пересекает плоскость средней окружности в двух точках.

Обмотка тора и односторонние поверхности. В евклидовом пространстве  $E^3$  рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую  $\gamma$  без самопересечения, заданную  $4\pi$ -периодической вектор-функцией  $\rho = \rho(v)$ , которая не является  $2\pi$ -периодической и  $2\pi$ -антипериодической.

Так как

$$\rho(v) = \rho(v + 4\pi), \quad (5)$$

то функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho_1(v)), \quad (6)$$

где

$$\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi) \quad (7)$$

есть  $2\pi$ -периодическая, не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho_1(v)) \quad (8)$$

есть  $2\pi$ -антипериодическая, не равная нулю.

С помощью этих функций построим примеры односторонних поверхностей.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Рассмотрим линейчатую поверхность  $M$

$$r(u, v) = s(v) + ul(v), \quad v \in [-\pi, \pi], \text{ и } u \in [-1, 1]. \quad (9)$$

Если при этом кривая невырожденная, а вектор  $l(v)$  не параллелен постоянному, то когда точка кривой  $s = s(v)$  завершит полный оборот, то прямая  $L = (s(v), l(v))$  сменит направление на противоположное.

Вектор-функция  $r(u, v) = s(v) + ul(v)$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ , и  $u \in [-1, 1]$ , определяет лист Мебиуса, для которого  $s = s(v)$  - средняя линия, а  $\rho = \rho(v) = r(1, v)$  - край.

Рассмотрим вектор нормали  $n = [r_v, r_u] = [s'(v), l(v)]$  вдоль линии  $s = s(v)$ . Так как  $s'(v) = s'(v + 2\pi)$ ,  $l(v) = -l(v + 2\pi)$ , то получим  $n(v) = -n(v + 2\pi)$ . Вектор  $n = n(v)$  сменит направление на противоположное, когда точка кривой  $s = s(v)$  завершит полный оборот.

Поверхность  $M$  есть односторонняя.

Определим поверхность  $K$  уравнением

$$r(u, v) = s(v) + \sin(u)l(v) \pm \sin(mu)(l(v + \pi) + f(v)e), \quad (10)$$

$u \in [-\pi, \pi]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ , где  $f = f(v)$  -  $2\pi$ -антипериодическая функция, а вектор  $e$  есть постоянный.

Вектор  $f(v)e$  удобно выбрать так, чтобы векторы  $l(v), l(v + \pi) + f(v)e$  были ортогональные.

Если  $m$  - четное число, то кривая  $v = \text{const}$  есть кривая типа восьмерки с  $m$  секциями, и поверхность замкнутая.

Если  $m$  - нечетное число, то кривая  $v = \text{const}$  есть незамкнутая кривая, а поверхность  $K$  есть поверхность с краем.

При  $m = 1$  это отрезок прямой, и поверхность  $K$  есть прямолинейный лист Мебиуса.

Исследуем вектор нормали вдоль замкнутой кривой  $r(0, v) = s(v)$ .

Имеем  $n(v) = [r_v, r_u] = [s'(v), l(v)] \pm m[s'(v), l(v + \pi) + f(v)e]$ .

Так как  $n(v) = -n(v + 2\pi)$ , то поверхность  $K$  есть односторонняя поверхность.

Рассмотрим еще одну замкнутую поверхность  $P$

$$r(u, v) = s(v) + \cos(u)l(v) + \sin(u)s(v), \quad (11)$$

$u \in [-\pi, \pi]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ .

Вектор нормали вдоль кривой  $s = 2s(v)(\cos(u) = 0)$  равен  $n(v) = [r_v, r_u] = [2s'(v), l(v)]$ . Он сменит направление на противоположное, когда точка кривой  $s = 2s(v)$  завершит полный оборот.

Поверхность  $P$  также односторонняя.

Будем исследовать эти поверхности, когда кривая  $\rho = \rho(v)$  расположена на торе. Рассмотрим тор

$$r(u, v) = ((a + b\cos(u))\cos(v), (a + b\cos(u))\sin(v), b\sin(u)). \quad (12)$$

Зададим линию  $u = kv/2$ , где  $k$  - нечетное число.

Тогда вектор-функция

$$\begin{aligned} \rho(v) = & ((a + b\cos(kv/2))\cos(v), \\ & (a + b\cos(kv/2))\sin(v), b\sin(kv/2)) \end{aligned} \quad (13)$$

есть  $4\pi$ -периодическая функция, которая не является  $2\pi$ -периодической и  $2\pi$ -антипериодической (обмотка тора).

Имеем

$$s(v) = (a\cos(v), a\sin(v), 0), \quad (14)$$

$$l(v) = (b\cos(kv/2)\cos(v), b\cos(kv/2)\sin(v), b\sin(kv/2)). \quad (15)$$

Замечаем, что кривая  $s = s(v)$  есть окружность.

Поверхность переноса и односторонние поверхности. В евклидовом пространстве  $E^3$  рассмотрим поверхность переноса

$$r(u, v) = U(u) + V(v), \quad (16)$$

где функции  $U(u)$ ,  $V(v)$  -  $2\pi$ -периодические, причем  $2\pi$ -наименьший период.

Зададим кривую  $u = kv/2$ , где  $k$  - нечетное число. Функция

$$\rho(v) = U(kv/2) + V(v)$$

есть  $4\pi$ -периодическая вектор-функция.

Рассмотрим

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi)), \quad l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi)).$$

С помощью этих функций построим примеры односторонних поверхностей.

Вектор-функция

$$r(u, v) = s(v) + ul(v), \quad v \in [-\pi, \pi], \quad u \in [-1, 1]$$

определяет лист Мебиуса  $M$ , для которого  $s = s(v)$  - средняя линия, а  $\rho = \rho(v) = r(1, v)$  - край.

Определим поверхность  $k$  уравнением

$$r(u, v) = s(v) + \sin(mu)(l(v + \pi) + f(v)e),$$

$$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi],$$

где  $f = f(v)$  -  $2\pi$ -антипериодическая функция, а вектор  $e$  есть постоянный.

Рассмотрим поверхность переноса эллипса по окружности

$$r(u, v) = s(v) + \cos(u)l(v) + \sin(u)s(v),$$

$$u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi].$$

Построим примеры рассматриваемых поверхностей, когда  $\rho(v) = U(kv/2) + V(v)$ .

Поверхность переноса эллипса по окружности.

Рассмотрим поверхность переноса эллипса по окружности

$$r(u, v) = (b\cos(u), 0, c\sin(u)) + (a\cos(v), a\sin(v), 0).$$

Кривую  $\rho = \rho(v)$  зададим в виде

$$\rho(v) = (b\cos(kv/2) + a\cos(v), a\sin(v), c\sin(kv/2)),$$

где  $k$  - нечетное число.

Тогда

$$\rho(v + 2\pi) = (-b\cos(kv/2) + a\cos(v), a\sin(v), -c\sin(kv/2)),$$

$$s(v) = (a\cos(v), a\sin(v), 0),$$

$$l(v) = (b\cos(kv/2), 0, c\sin(kv/2)).$$

Построим поверхность переноса и кривую  $\rho = \rho(v)$  при  $a = 6, b = 2, c = 3, k = 1, k = 3$ .

Уравнение листа Мебиуса при  $k = 1$  примет вид:

$$r(u, v) = (6\cos(v) + 2u\cos(v/2), 6\sin(v), 3u\sin(v/2)).$$

$$v \in [-\pi, \pi], u \in [-1, 1].$$

При  $k = 3$  имеем

$$r(u, v) = (6\cos(v) + 2u\cos(3v/2), 6\sin(v), 3u\sin(3v/2)).$$

$$v \in [-\pi, \pi], u \in [-1, 1].$$

Так как  $l = (b\cos(kv/2), 0, c\sin(kv/2))$ , то следует, что образующие прямые листа Мебиуса параллельны плоскости  $y = 0$ .

Бутылка Клейна.

При  $k = 1$  имеем

$$l(v + \pi) = (-2\sin(v/2), 0, 3\cos(v/2)).$$

Положим  $k = 3$ . Тогда

$$l(v + \pi) = (2\sin(v/2), 0, -3\cos(v/2)).$$

Запишем уравнение бутылки Клейна для случая  $m = 2$ ,  $f = 0$  при  $k = 1$ :

$$r(u, v) = (6\cos(v) + \sin(u)2\cos(3v/2) - \sin(2v)2\sin(v/2),$$

$$6\sin(v), \sin(u)3\sin(v/2) + (\sin(2u)3\cos(v/2)),$$

$$v \in [-\pi, \pi], u \in [-\pi, \pi].$$

Скрещенный колпак.

Уравнение (11) при  $k = 1$  примет вид:

$$r(u, v) = (1 + \sin(u))6\cos(v) + \cos(u)2\cos(v/2),$$

$$(1 + \sin(u))6\sin(v), 3\cos(u)\sin(v/2)),$$

$$v \in [-\pi, \pi], u \in [-\pi, \pi].$$

Для  $k = 3$  имеем:



$$r(u, v) = (1 + \sin(u))6\cos(v) + \cos(u)2\cos(3v/2),$$

$$(1 + \sin(u))6\sin(v), 3\cos(u)\sin(3v/2)),$$

$$v \in [-\pi, \pi], u \in [-\pi, \pi].$$

Поверхность (11) является моделью проективной плоскости. Если от этой модели отрезать плоскостью небольшой диск, то оставшаяся часть есть скрещенный колпак.

Модели проективной плоскости. Рассмотрим некоторые модели проективной плоскости в  $E^3$ .

1. Скрещенный колпак с крышкой. Положим

$$s(u) = (5\cos(u), 5\sin(u), 0),$$

$$l(u) = (\cos(v/2)\cos(u), \cos(u/2)^*\sin(u), \sin(u/2)),$$

$$p(u) = s(u) + l(u).$$

Имеем

$$\begin{aligned} r(u, v) = & (1 + \cos(v))(5\cos(u), 5\sin(u), 0) + \\ & + \sin(v)\cos(v/2)\cos(u), \cos(u/2)\sin(u), \sin(u/2)). \end{aligned} \quad (17)$$

Если у поверхности (17) срезать крышку, то получим скрещенный колпак [3, с.304.]. Используем следствие к теореме.

Положим

$$f(u, v) = \frac{1}{2 + \sin(3/2u)\sin(v)}.$$

2. Римская поверхность. Рассмотрим случай, когда

$$s(u) = (0, 0, 1/4\sin(u)), l(u) = 1/2\cos(u/2), 1/2\sin(u/2), 0).$$

Линия  $s = s(v)$  у этой поверхности есть отрезок прямой. В прямоугольных координатах данная поверхность определяется уравнением  $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + = 0$ . Мы получили Римскую поверхность [3, с.305].

3. Поверхность Боя. Используем следствие к теореме. Положим

$$f(u, v) = \frac{1}{2 + \sin(3/2u)\sin(v)}.$$

Тогда поверхность

$$r(u, v) = \frac{1}{2 + \sin(3/2u)\sin(v)}((1 + \cos(v))(0, 0, 1/4\sin(u)) +$$

$$+ \sin(v)((1/2 \cos(u/2), 1/2 \sin(u/2), 0))$$

есть поверхность Боя [3, с.305]. Если

$$f(u, v) = \frac{1}{2 + \sin(5/2u) \sin(v)},$$

то односторонняя поверхность имеет 5 «рогов».

Визуализация односторонних поверхностей.

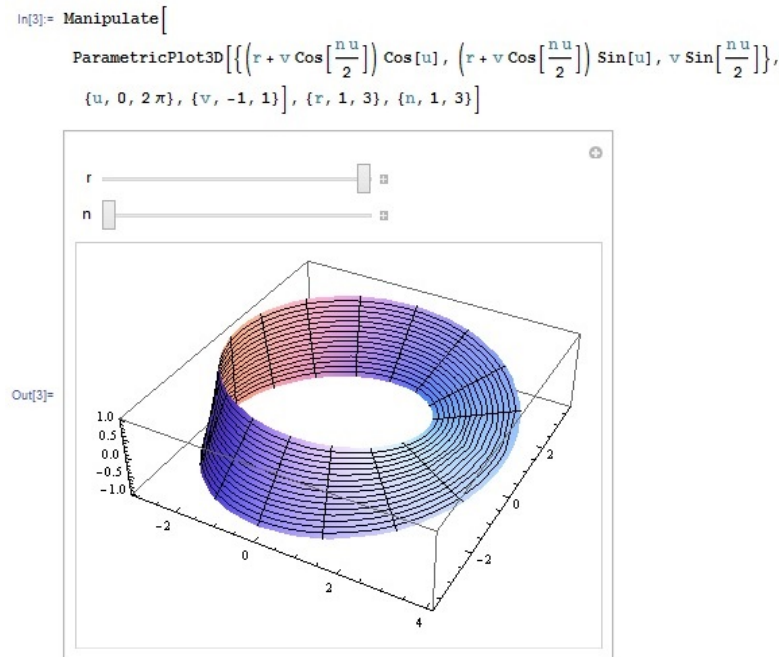


Рисунок 1 — Лист Мебиуса.

```
In[1]:= ParametricPlot3D[{(1 / (2 - Sin[3 u] Sin[2 v]) Cos[v]^2 Cos[2 u] + Cos[u] Sin[2 v],
  Cos[v]^2 Sin[2 u] - Sin[u] Sin[2 v], 3 Cos[v]^2), {u, -π/2, π/2}, {v, 0, π},
  Boxed -> False, Axes -> False]
```

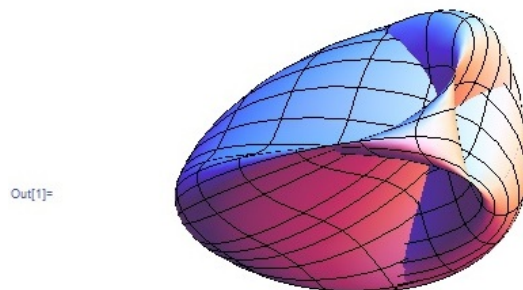


Рисунок 2 — Римская поверхность.

```
In[4]:= ParametricPlot3D[{6 * Cos[u] (1 + Sin[u]) + 4 * (1 - Cos[u] / 2) * Cos[v] * Cos[u / 2 + Pi / 4],
  16 * Sin[u] + 4 * (1 - Cos[u] / 2) * Sin[u / 2 + Pi / 2] * Cos[v], 4 * (1 - Cos[u] / 2) * Sin[v]},
{u, -Pi / 2, 3 * Pi / 2}, {v, 0, 2 * Pi}]
```

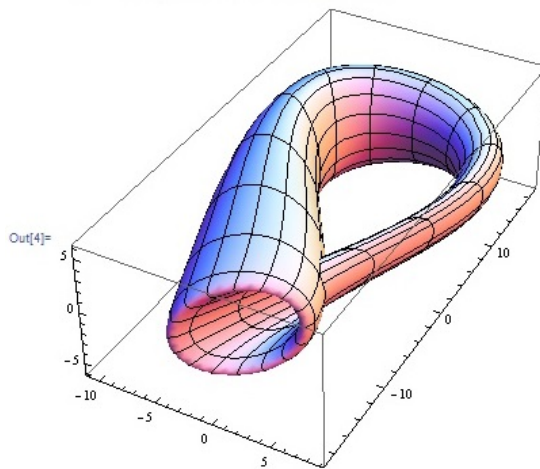


Рисунок 3 — Бутылка Клейна.

**Заключение.** В последнее время со стороны архитекторов и дизайнеров обозначился интерес к созданию арт-объектов и сооружений с использованием односторонней поверхности - лист Мебиуса. Это связано с теми новыми возможностями, которые дает компьютерное моделирование в исследовании свойств поверхностей путем использования компьютерных моделей подобных объектов. Поэтому изучение односторонних поверхностей является актуальной задачей. В выпускной работе исследованы следующие односторонние поверхности: лист Мебиуса, бутылка Клейна, скрещенный колпак, римская поверхность, поверхность Боя. С использованием Wolfram Mathematica построены рассматриваемые поверхности.