МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра геометрии

# Поверхности постоянной средней кривизны

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Филиной Татьяны Максимовны

Научный руководитель
доцент, к.п.н. ____________________ А.В. Букушева
подпись, дата

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ____________________ С.В. Галаев
подпись, дата

Саратов 2022

**Введение.** Потребности архитекторов, дизайнеров и инженеров-проектировщиков в инновационном формообразовании ставят вопрос о движении в архитектуре. Стационарная архитектура не в состоянии реагировать на факторы окружающей среды. Средства вычислительного проектирования помогли установить связь между параметрическим и имитационным моделированием, что позволило анализировать поведение сооружения в течение времени. Архитекторы могут оценить поведение объекта, будь то здание, город, ландшафт или инфраструктура. Открывается новый подход в архитектуре, основанный на динамическом развитии формообразования.

Широкое применение получили поверхности вращения и пологие оболочки переноса, гиперболоид, как формообразующая покрытия большепролетных сооружений. Зонтичные поверхности и линейчатые поверхности различной гауссовой кривизны не часто применяются в архитектуре. Поиски оптимального соотношения прочности и затраченного материала привело к использованию, в частности, поверхностей постоянной средней кривизны - минимальных поверхностей. Минимальная поверхность, у которой средняя кривизна равна нулю во всех точках, идеальна для тонкостенных конструкций. Если затрагивать вопросы экономичности и экологии объекта, то данные поверхности позволяют создать тонкостенные оболочки, требующие минимальных затрат материала. Физической моделью минимальных поверхностей являются «мыльные пленки», возникающие на замкнутых проволочных контурах после их извлечения из мыльной воды.

Цель бакалаврской работы - построение поверхностей постоянной средней кривизны.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

- изучить основные понятия теории поверхностей (способы задания поверхности, классификация точек поверхности, параметризация поверхности, геометрический смысл коэффициентов первой квадратичной);
- изучить построение поверхностей постоянной средней кривизны из поверхностей вращения постоянной положительной гауссовой кривизны;

- визуализировать поверхности постоянной средней кривизны в Wolfram Mathematica.

Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников. Во введении описана актуальность работы, сформулирована цель и поставлены задачи работы. В первом разделе даны основные понятия теории поверхностей. Во втором разделе определяются минимальные поверхности. В третьем разделе для поверхностей вращения постоянной положительной гауссовой кривизны строятся поверхности постоянной средней кривизны. С использованием Wolfram Mathematica строятся рассматриваемые поверхности.

**Основное содержание работы.** Введем следующее определение:

Определение 1.1. Гладкой поверхностью называется взаимно однозначное дифференцируемое отображение $r : U \to \mathbb{R}^3$, где $U$ - открытое множество в $\mathbb{R}^2$ с координатами $(u, v)$, причем

$$\left[ \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right] \neq 0 \text{ в } U. \tag{1.1}$$

Отображение $r : U \to \mathbb{R}^3$ называется параметризацией поверхности. При выполнении условия (1) параметризация называется регулярной. Регулярная параметризация определяет гладкую поверхность. Значения $u$ и $v$ полностью определяют точку. Параметры $u$ и $v$ называются внутренними координатами точки на поверхности. Если точка имеет координаты $x, y, z$, то при изменении $u$ и $v$ координаты тоже будут меняться:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v). \tag{1.2}$$

Соотношения (2) называются уравнениями параметризованной поверхности, а $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ - ее координатными функциями. Равенства (2) определяют в области $U$ вектор-функцию $r(u, v)$ двух переменных. Предел, непрерывность и алгебраические операции над такими функциями определены так же, как и для вектор-функции одного переменного. Частные производные вектор-функции $r(u, v)$ обозначаются путем добавления нижних индексов, соответствующих переменным, по которым проводится дифференцирование: $r_u(u, v)$, $r_v(u, v)$.

Предложение 1.1. Пусть $r(u,v)$ регулярная параметризация поверхности. Чтобы параметризация $r_1(\xi,\eta)$, полученная заменой внутренних координат $u=\phi(\xi,\eta), v=\psi(\xi,\eta)$, была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы функции $\phi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta)$ были дифференцируемы и якобиан

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(\xi,\eta)}=\phi_\xi\psi_\eta-\psi_\xi\phi_\eta\neq 0.$$

*Доказательство.* Используя формулу дифференцирования сложной функции, получим

$$[r_{1\xi}(\xi,\eta),r_{1\eta}(\xi,\eta)]=[r_u\phi\xi+r_v\psi\xi,r_u\phi\eta+r_v\phi\eta]=[r_u(u,v),r_v(u,v)](\phi_\xi\psi_\eta-\psi_\xi\phi_\eta),$$

откуда непосредственно вытекает доказываемое утверждение. □

Произвольная точка $P$ гладкой поверхности называется точкой эллиптического типа, если гауссова кривизна в этой точке $K>0$; точкой гиперболического типа, если $K<0$; точкой параболического типа, если $K=0$.

Примерами поверхности, у которой все точки эллиптического типа, являются эллипсоид, двуполостной гиперболоид, эллиптический параболоид.

Точка эллиптического типа называется точкой закругления или омбилической, если в ней главные кривизны равны. Следовательно, омбилические точки определяются уравнением

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}, \tag{1.3}$$

где $E,F,G$ и $L,M,N$ - коэффициенты первой и второй квадратичных форм соответственно.

Поверхность, состоящая из точек закругления, является сферой.

В точке гиперболического типа нормальные кривизны нормальных сечений имеют разные знаки. Поверхность в некоторой окрестности точки лежит по разные стороны касательной плоскости. Примерами поверхности, у которой все точки гиперболического типа, являются однополостной гиперболоид, гиперболический параболоид.

В каждой точке гиперболического типа имеются два направления, называемые асимптотическими, для которых нормальная кривизна поверхности равна нулю. Асимптотические направления определяются обращением в нуль второй квадратичной формы

$$L\phi_1'^2 + 2M\phi_1'\phi_2' + N\phi_2'^2 = 0.$$

Асимптотической называется кривая на поверхности, которая в каждой точке имеет асимптотическое направление. Дифференциальное уравнение асимптотических линий получим, выполнив замену $du = \phi_1' dt, dv = \phi_2' dt$:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

В окрестности точки параболического типа ничего определенного о расположении поверхности относительно касательной плоскости заранее сказать нельзя. Примерами поверхности, у которой все точки параболического типа, являются конусы, цилиндры.

В каждой точке параболического типа одно из главных направлений является асимптотическим. Точка параболического типа, в которой все направления являются асимптотическими, называются точками уплощения. В точках уплощения гауссова и средняя кривизны одновременно обращаются в нуль. Поверхность, состоящая из точек уплощения, является частью плоскости.

Длина координатной линии $u = t$, $v = v_0$, $t \in [t_0, t_1]$ на гладкой поверхности с параметризацией $r : U \to \mathbb{R}^3$ задана следующей формулой:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(t, v_0)} dt$$

С другой стороны, на карте поверхности длина этой кривой

$$\sigma = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u'^2 + v'^2} dt = t_1 - t_0.$$

Применяя к интегралу теорему о среднем, найдем

$$S = \lim_{\sigma \to 0} \frac{S}{\sigma} = \sqrt{E(t_0, v_0)}.$$

Таким образом, $\sqrt{E}$ равен отношению малых дуг координатных линий $v = v_0$ на поверхности и в области $U$, т.е. задает масштаб карты поверхности вдоль этих координатных линий. Аналогично найдем, что $\sqrt{G}$ задает масштаб карты поверхности вдоль других координатных линий $u = u_0$.

Для коэффициента $F$ имеем

$$F = (r_u, r_v) = |r_u||r_v| \cos\alpha,$$

где $\alpha$ - угол между векторами $r_u$ и $r_v$. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Коэффициент $F$ определяет угол между координатными линиями на поверхности.

Предложение 1.2. Чтобы координатные линии в каждой точке поверхности были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы $F = 0$.

Выясним смысл определителя матрицы первой квадратичной формы $\det G = EG - F^2$. Имеем

$$|r_u \times r_v|^2 = |r_u|^2 \cdot |r_v|^2 \cdot sin^2\alpha = |r_u|^2 \cdot |r_v|^2 - |r_u|^2 \cdot |r_v|^2 \cdot cos^2\alpha = EG - F^2.$$

По геометрическому смыслу модуля векторного произведения определитель $detG$ равен квадрату площади параллелограмма, построенного на базисных векторах $r_u$ и $r_v$.

На поверхности внутренние координаты можно ввести многими способами. Целесообразно выбирать их так, чтобы упростить коэффициенты первой квадратичной формы. Можно ввести на поверхности координаты так, чтобы $E(u,v) = 1$, $F(u,v) = 0$, $G(u,v) > 0$. Такая система называется полугеодезической.

При изотермических координатах $E(u,v) = G(u,v), F(u,v) = 0$. Как следует из уравнения

$$\cos\alpha = \frac{E\phi_1'\psi_1' + F(\phi_1'\psi_2' + \phi_2'\psi_1') + G\phi_2'\psi_2'}{\sqrt{E\phi_1'^2 + 2F\phi_1'\phi_2' + G\phi_2'^2} \cdot \sqrt{E\psi_1'^2 + 2F\psi_1'\psi_2' + G\psi_2'^2}},$$

в этих координатах углы между линиями на поверхности и их изображениями на карте сохраняются. Эти координаты применяются в штурманских картах для прокладки курсов воздушных и морских судов.

Наконец, в чебышевских координатах $E(u,v) = G(u,v) = 1$, а $F(u,v)$ совпадает с косинусом угла между координатными линиями. Длины координатных линий на поверхности и на карте сохраняются. Эти координаты применяются в задачах, связанных с раскроем ткани, листового металла.

Определение 1.2. Параметризация гладкой поверхности называется полугеодезической, если все координатные линии одного семейства являются геодезическими и в каждой точке поверхности координатные линии ортогональны.

Предложение 1.3. Всякая параметризация, удовлетворяющая условию $E = 1, F = 0$, является полугеодезической.

*Доказательство.* Согласно предложению 2 при $F = 0$ координатная сетка ортогональна.

По формулам

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11} = \tfrac{E_u}{2E}, \Gamma^1_{12} = \tfrac{E_v}{2E}, \Gamma^1_{22} = -\tfrac{G_u}{2E},\\ \Gamma^2_{11} = -\tfrac{E_v}{2G}, \Gamma^2_{12} = \tfrac{G_u}{2G}, \Gamma^2_{22} = \tfrac{G_v}{2G}\end{gathered}$$

при $E = 1$ имеем $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = 0$.

При данной параметризации уравнения геодезической

$$\begin{cases} \ddot{u}^1 + \Gamma^1_{11}(\dot{u}^1)^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2 + \Gamma^1_{22}(\dot{u}^2)^2 = 0, \\ \ddot{u}^2 + \Gamma^2_{11}(\dot{u}^1)^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2 + \Gamma^2_{22}(\dot{u}^2)^2 = 0, \\ g_{11}(\dot{u}^1)^2 + 2g_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2 + g_{22}(\dot{u}^2)^2 = 1 \end{cases}$$

принимают вид

$$\begin{cases} \ddot{u} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = 0, \\ \ddot{v} + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 = 0, \\ \dot{u}^2 + G\dot{v}^2 = 1. \end{cases}$$

Любая координатная линия $v = v_0$ является решением этой системы, причем $\dot{u} = 1$. Это означает, что $u$ совпадает с длиной дуги геодезической $v = v_0$ с точностью до константы.

Способ построения полугеодезической параметризации следует из ее определения. Пусть гладкая поверхность задана уравнением $r = r(u, v)$, а $L$ - произвольная линия на поверхности с внутренним уравнением

$$u = \phi_1(t), v = \phi_2(t), t \in [a, b].$$

Параметризация кривой $L$ определяется вектор-функцией

$$r_1(t) = r(\phi_1(t), \phi_2(t)).$$

Через каждую точку $P$ кривой $L$ проходит геодезическая $C_{(t)}$, ортогональная $L$. Будем считать ее ориентированной таким образом, что касательные векторы кривых $C_{(t)}, L$ и вектор нормали к поверхности образуют правую твойку. Введем на кривой $C_{(t)}$ естественную параметризацию $t_{(t)}(s)$, в которой длина дуги кривой $C_{(t)}$ отсчитывается от $L$, так что $r_{(t)}(0) = r_l(t)$. Тогда в некоторой окрестности отрезка $[a, b]$, определена вектор-функция $r(s,t) = r_{(t)}(s)$. Сама кривая $L$ задается уравнением $s = 0$, а геодезическая $C_{(t_0)}$ - уравнением $t = t_0$.

Чтобы убедиться, что $r(s,t)$ - полугеодезическая параметризация, осталось проверить ортогональность координатных линий в каждой точке, т.е. равенство $F = 0$. Очевидно, что

$$r_s(s,t) = \dot{r}_{(t)}(s),\ r_{ss}(s,t) = \ddot{r}_{(t)}(s),$$

причем $\ddot{r}_{(t)}(s)$ как вектор кривизны геодезической $C_{(t)}$ направлен по нормали к поверхности. Имеем

$$E(s,t) = (r_s, r_s) = (\dot{r}_{(t)}(s), \dot{r}_{(t)}(s)) = 1,\ F(s,t) = (r_s, r_t).$$

Из построения линий $C_{(t)}$ следует, что $F(0,t) = 0$ на линии $L$. Вычислим производную:

$F_s(s,t) = (r_s, r_s)' = (r_{ss}, r_t) + (r_s, r_{ts}) = (r_{ss}, r_t) + \frac{1}{2}(r_s, r_s)'_t = (\ddot{r}_{(t)}(s), r_t(s,t)) + \frac{1}{2}E_t = 0.$

Итак, коэффициент $F$ не зависит от $s$. Значит, $F(s,t) = F(0,t)$ и построенная параметризация является полугеодезической. □

Определение 2.1. Минимальной называется поверхность, у которой в каждой точке средняя кривизна равна нулю.

Примерами таких поверхностей могут служить мыльные пузыри (разность давлений отлична от нуля, средняя кривизна постоянна и отлична от нуля) и мыльные пленки, затягивающие проволочные контуры (давления одинаковы, средняя кривизна равна нулю). Мыльные пленки впервые были подробно изучены Жозефом Плато.

Самыми известными минимальными поверхностями стали геликоид и катеноид.

Пусть $M$ - гладкая поверхность в евклидовом пространстве $E^3$, $n$ - единичный вектор нормали. Определен оператор $A : \partial_X n = -AX$. Собственные значения $k_1, k_2$ оператора $A$ называются главными кривизнами поверхности, полусумма их $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ есть средняя кривизна, а произведение $K = k_1 k_2$ - гауссова кривизна поверхности.

Имеет место теорема Пуассона-Лапласа:

Теорема 3.1. Предположим, что двумерная гладкая поверхность $M$ в $E^3$ является границей раздела двух однородных сред, находящихся в равновесии. Пусть $P_1, P_2$ - давление в средах. Тогда средняя кривизна $H$ по поверхности $M$ постоянна и равна $H = h(P_1 - P_2)$, где постоянная $\lambda = \frac{1}{h}$ называется коэффициентом поверхостного натяжения.

Поверхности, для которых $H = const$, называются поверхностями постоянной средней кривизны(ПСК).

Отрицательный ответ на проблему Хопфа: Существуют ли компактные поверхности ПСК, отличные от сферы, дана следующая формулировка теоремы Хопфа:

Теорема 3.2 Единственная поверхность ПСК при $H = \frac{1}{2}$, топологически эквивалентная сфере, - это стандартная сфера радиуса 2.

Пусть $r = r(u, v)$ - уравнение поверхности $M$, $n$ - орт нормали, $h = const$. Уравнение параллельной поверхности $\bar{r}$ имеет вид

$$\bar{r} = r + hn. \tag{3.1}$$

Обозначим через $K, H, \bar{K}, \bar{H}$ - гауссовы и средние кривизны поверхностей $M, \bar{M}$, соответственно. Имеем

$$\bar{K} = \frac{K}{1-2hH+h^2K},\ \bar{H} = \frac{H-hK}{1-2hH+h^2K}. \tag{3.2}$$

Положим в (5)

$$1 - Kh^2 = 0,\ h = \pm\frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Тогда

$$\bar{H} = \pm\frac{\sqrt{K}}{2}.$$

Этот результат дает возможность построения поверхностей постоянной средней кривизны по поверхностям постоянной гауссовой кривизны.

В евклидовом пространстве $E^3$ рассмотрим поверхность вращения $M$, полученную вращением плоской кривой вокруг оси. Обозначим через $k = (0,0,1)$ - орт оси, а через $e = (cos(v), sin(v), 0)$ - радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси.

Тогда поверхность $M$ можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k, \tag{3.3}$$

где $f = f(u)$ - дифференцируемая функция, $u, v$ -параметры.

Обозначим через $n$ - орт нормали к поверхности $M$. Тогда

$$n = \frac{f(u)'e(v) - k}{\sqrt{(f(u)')^2 + 1}}. \tag{3.4}$$

Главные кривизны $k_1, k_2$ поверхности $M$ имеют вид

$$k_1 = -\frac{f(u)'}{u\sqrt{(f(u)')^2+1}}, k_2 = -\frac{f(u)''}{\sqrt{(f(u)')^2+1}^3}. \tag{3.5}$$

Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{f(u)'}{u\sqrt{(f(u)')^2+1}}\frac{f(u)''}{\sqrt{(f(u)')^2+1}^3} = K. \tag{3.6}$$

Получим решения

$$f(u) = \pm\int\limits_0^u \sqrt{\frac{Kt^2-(c-1)}{c-Kt^2}}dt, c = const. \tag{3.7}$$

Имеем

$$f(u) = \pm\frac{I\sqrt{c-1}EllipticE(\frac{u\sqrt{Kc}}{c}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1})}{\sqrt{K}} + c_1, c, c_1 = const. \tag{3.8}$$

Для определенности, полагаем $K = 1$.

Имеем

$$f(u) = \pm\int\limits_0^u \sqrt{\tfrac{t^2-(c-1)}{c-t^2}}dt + c_1, c, c_1 = const,$$

$$f(u) = \pm I\sqrt{c-1}EllipticE(\tfrac{u}{\sqrt{c}}, \tfrac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1}) + c_1.$$

Полагая $c = 1/2$, получим

$$f(u) = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}EllipticE(u\sqrt{2}, I) + c_1. \tag{3.9}$$

Далее приведем построение таких поверхностей постоянной средней кривизны, как геликоид и катеноид, в программе Wolfram Mathematica:

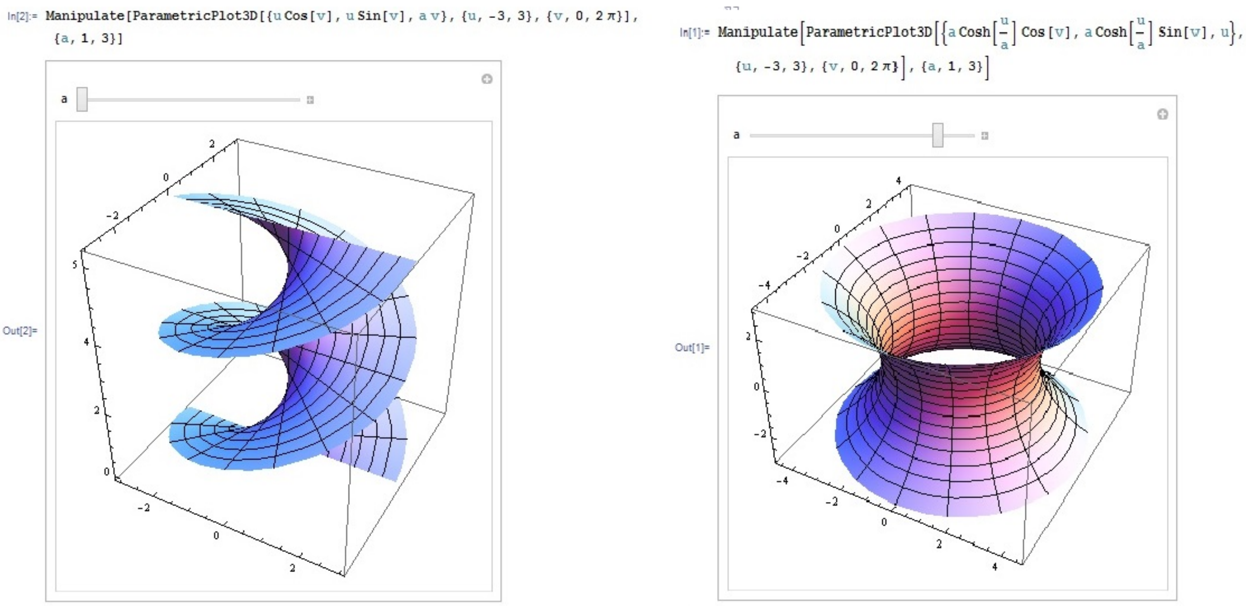


Рисунок 1 — Геликоид и катеноид.

**Заключение.** Современные тренды параметрической архитектуры отводят нас от использования статических поверхностей, выдвигая на первое место динамику. Открывается новый подход в архитектуре, основанный на динамическом развитии формообразования. Стремление выработать наиболее оптимальное соотношение прочности и затраченного материала подводит к оценке перспектив использования, в частности, минимальных поверхностей. Поэтому изучение поверхностей постоянной средней кривизны является актуальной задачей.