МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Оптимальное управление в экстремальных задачах на классах однолистных функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Осыко Никиты Михайловича

Научный руководитель
доцент, к.ф. – м.н. ______________ В.Г. Гордиенко

Заведующий кафедрой
и.о.зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ______________ Е.В. Разумовская

Саратов 2022

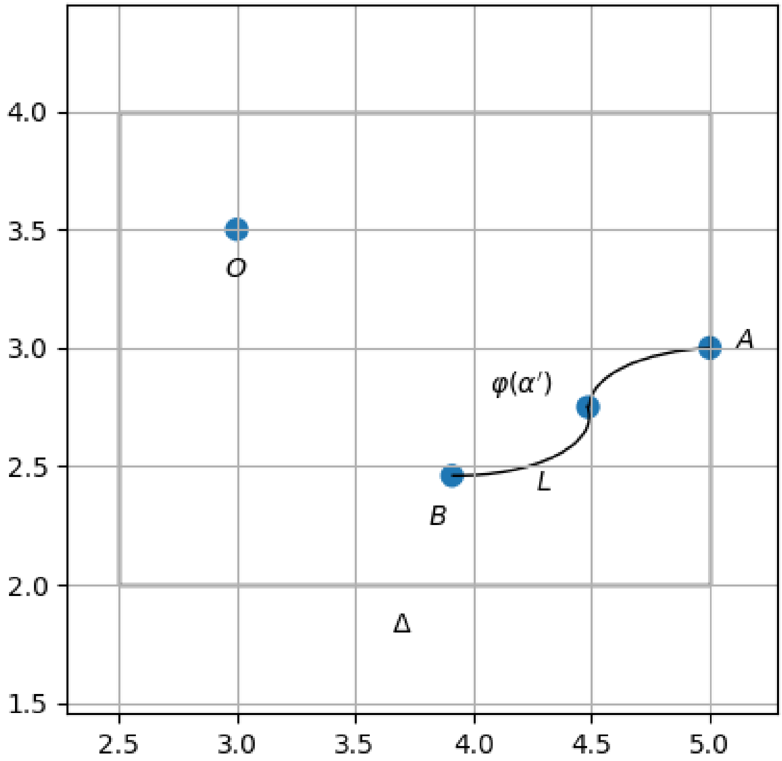
Введение. Теория однолистных функций является одной из центральных тем исследования в теории конформных отображений. Наиболее актуальные задачи в классах однолистных функций формулируются как экстремальные задачи об областях значений непрерывных функционалов или сводится к ним. К этим задачам относится также проблема коэффициентов, заключающаяся в описании множества значений системы: $V_n = a_2, a_3, ..., a_n$. Одним из многочисленных методов решения экстремальных задач для однолистных функций, является метод оптимального управления. Этот метод, разработанный в рамках параметрического метода и основанный на применение принципа максимума Л.С. Понтрягина, в теории однолистных функций впервые был применен в работах И.А. Александрова и В.И. Попова. в дальнейшем теория оптимального управления успешно применялась Д.В. Прохоровым и его учениками.

В выпускной работе рассматривается краткое изложение теории Лёвнера для единичного круга, формулируется принцип максимума Понтрягина, который затем применяется к решению экстремальной задачи об оценке коэффициентного функционала $I(f) = a_3 - \alpha a_2^2, \alpha \in R$ в классе S_R^M ограниченных однолистных функций с вещественными коэффициентами.

Цели работы:

- Изучить основы теории Лёвнера для однолистных в единичном круге функций;
- Познакомиться с применением методов теории оптимального управления, а именно, принципа максимума Понтрягина, к решению экстремальных задач в классах однолистных функций;
- Рассмотреть решение задач с применением изученных методов.

Основное содержание работы. Зафиксируем область Δ с разрезом L не проходящим через $O (O \in \Delta)$.



Рассмотрим $L_{\alpha'} = \{\omega : \omega = \phi(\alpha), \alpha' \leq \alpha \leq \alpha_0\}$ и семейство областей Лёвнера $\Delta_\alpha = \Delta \backslash L_\alpha$ при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$.

Рассмотрим семейство соответствующих Δ_α аналитических функций. Пусть выполняются дополнительные условия: $\omega = \psi(z, \alpha)$ однолистно отображают $\{|z| < 1\} \to \Delta_\alpha$. Причём, $\psi(0, \alpha) = 0, \psi_z'(0, \alpha) > 0$.

И рассмотрим обратные к ним $F(\omega, \alpha) = \psi^{-1}(z, \alpha)$, которые однолистно отображают $\Delta_\alpha \to \{|z| < 1\}, F(0, \alpha) = 0,\ F_\omega'(0, \alpha) > 0$.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1:

Функция $F(\omega, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Лёвнера

$$\frac{dF(\omega, t)}{dt} = -F(\omega, t)\frac{1 + e^{-i\mu F(\omega,t)}}{1 - e^{-i\mu F(\omega,t)}}$$

Теорема 2:

Функция $\psi(z, t)$ удовлетворяет уравнению Лёвнера в частных производных

$$\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z} = z * \frac{\partial\psi(z, t)}{\partial z} * \frac{e^{i\mu} + z}{e^{i\mu} - z}$$

Оптимальное управление — это задача проектирования системы, обеспечивающей для заданного объекта управления или процесса закон управления или управляющую последовательность воздействий, обеспечивающих максимум или минимум заданной совокупности критериев качества системы.

Пусть $(u(t), x(t))$ - оптимальный (по быстродействию) процесс, переводящий объект из фазового состояния x_0 в состояние x_1 за время $t_0 \leq t \leq t_1$. Построим для этого процесса множество K, которое является выпуклым конусом с вершиной в точке $Q = x_1$; так как процесс $(u(t), x(t))$ оптимален, то этот конус K не совпадает со всем фазовым пространством . Следовательно, существует такой отличный от нуля вектор $\overline{n}$, что для любой точки P конуса K выполенено соотношение

$$\overline{n} \cdot \overline{Q}P \leq 0$$

Но точка P тогда и только тогда принадлежит конусу K, когда $\overline{QP}$ является вектором смещения. Таким образом, вектор $\overline{n}$ обладает тем свойством, что скалярное произведение его на любой вектор вида

$$-f(x(t_1), u(t_1))\delta t + \sum_{i=1}^{s} l_i \Delta(\tau_i, h_i) \tag{1}$$

неположительно. В частности,

$$\overline{n} \cdot (-f(x(t_1), u(t_1))) \leq 0$$

это получается, если в формуле (1) положить $s = 0, \delta t = 1$, то есть

$$\overline{n} \cdot f(x(t_1), u(t_1)) \geq 0. \tag{2}$$

Далее,

$$\overline{n} \cdot \Delta(\tau, h) \leq 0, \tag{3}$$

где τ - любая точка непрерывности уравнения $u(t)$, а вектор h имеет вид

$$h = f(x(\tau), \upsilon) - f(x(\tau), u(\tau)), \upsilon \in U \tag{4}$$

(это получается, если в формуле (1) положить $\delta t = 0, s = 1, l = 1$. Заметим теперь, что неравенство (3) имеет место и в том случае, если τ - любая точка разрыва управления $u(t)$. В самом деле, пусть τ_0 - точка разрыва управления $u(t)$. Так как допустимое управление $u(t)$ непрерывно справа, то $u(t)$ непрерывно на отрезке $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \theta$ (где θ - достаточно малое положительное число), а потому и вектор h непрерывно зависит от τ при $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \theta$. Из этого следует, что и $\Delta(\tau, h)$ непрерывно зависит от τ при $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \theta$. При этом для любого τ, удовлетворяющего неравенствам - $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \theta$, соотношение (3) имеет место (ибо все эти τ являются точками непрерывности управления $u(t)$). Переходя в (3) к пределу при $\tau \to \tau_0 + 0$ (то есть $\tau \to \tau_0$, $\tau > \tau_0$), мы получаем (в силу непрерывности функции $\Delta(\tau, h)$ на отрезке $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \theta$

$$\overline{n} \cdot \Delta(\tau_0, h) \leq 0, \text{ где } h = f(x(\tau_0), \upsilon) - f(x(\tau_0), u(\tau_0)).$$

Итак, мы установили, что существует вектор $\overline{n}$, удовлетворяющий условиям (2) и (3), где τ - произвольная точка отрезка $t_0 \leq t \leq t_1$, на котором задано управление $u(t)$, а h - вектор, определяемый формулой (3). Обозначим теперь через $\delta x(t)$ решение системы с начальным условием

$$\delta x(\tau) = h \tag{5}$$

и будем это решение рассматривать на отрезке $\tau \leq t \leq t_1$. Тогда по определению

$$\Delta(\tau, h) = \delta x(t_1),$$

так что соотношение (2) принимает вид

$$\overline{n} \delta x(t_1) \leq 0. \tag{6}$$

Вектор $\overline{n}$ можно представить в виде $\Psi(t_1)$, где $\Psi(t)$ - некоторое решение системы (4). Это мы и сделаем. Именно, обозначим через $\Psi(t) = (\Psi_1(t), ..., \Psi_n(t))$ решение линейной системы (4) с начальным (или, лучше было бы сказать, «конечным») условием

$$\Psi(t_1) = \overline{n} \tag{7}$$

В силу линейности системы (4) решение $\Psi(t)$ определено на всем отрезке $t_0 \le t \le t_1$ (на котором заданы функции $u(t)$ и $x(t)$, входящие в правые части системы (4)). Скалярное произведение постоянно; в частности,

$$\Psi(t)\delta x(t_1)$$

и потому

$$\Psi(\tau)\delta x(\tau) \le 0$$

Это соотношение можно записать в виде $\Psi(\tau)h \le 0$, что в силу (4) дает нам

$$\Psi(\tau)\{f(x(\tau), \upsilon) - f(x(\tau), u(\tau))\} \le 0$$

или, наконец,

$$\Psi(\tau)f(x(\tau), \upsilon) \le \Psi(\tau)f(x(\tau), u(\tau)), \upsilon \in U \tag{8}$$

Заметим еще, что в силу (7) соотношение (4) переписывается в виде

$$\Psi(t_1)f(x(t_1), u(t_1)) \ge 0 \tag{9}$$

Итак, мы пришли к следуюзему выводу.

Принцип максимума Понтрягина. Рассматривается управляемый объект, движение которого описывается системой уравнений

$$\dot{x^i} = f^i(x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^r) = f^i(x, u), i = 1, ..., n$$

или, в векторной форме,

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{10}$$

В пространстве переменных $u^1, ..., u^r$ задано некоторое множество U (область управления); допустимым управлением считается произвольная кусочно-непрерывная функция $u(t) = (u^1(t), ..., u^r(t))$ со значениями в U, непрерывная справа в точках разрыва и непрерывная в концах отрезка, на котором она определена. Далее, в фазовом пространстве X переменных $x_1, ..., x_n$ заданы две точки x_0 и x_1 (начальное и конечное фазовые состояния). Наконец, рассматривается некоторый процесс $(u(t), x(t)), t_0 \le t \le t_1$, переводящий объект из состояния x_0 в состояние x_1; это означает, что $x(t)$ есть решение системы (10), соответствующее допустимому управлению $u = u(t)$ и удовлетворяющее начальному и конечному условиям

$$x(t_0) = x_0,\, x(t_1) = x_1$$

Таким образом, рассматриваемый процесс затрачивает на переход из состояния x_0 в x_1 время, равное $t_1 - t_0$. Процесс $(u(t), x(t))$ называется оптимальным (в смысле быстродействия), если не существует процесса, переводящего объъект из состояния x_0 в состояние x_1 за меньшее время.

В данной главе рассматривается работа Gordienko V. G., Prokhorov D. V. "Optimization in an problem for bounded univalent function", в которой с помощью методов теории управления отыскивается точный экстремум для функционала $a_3 - \alpha a_2^2$ в классе S_R^M голоморфных однолистных функций f, $f(z) = z + a_2 z^2 + ..., |z| < 1, a_n \in R, n \geq 2$ удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$.

Пусть S - класс голоморфных и однолистных функций $f, f(z) = z + a_2 z^2 + + ...$, в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$; $S^M, M > 1$ - класс функций $f \in S$, удовлетворяющих условию $|f(z)| < M$ в E; S_R - класс функций $f \in S$ с действительными коэффициентами $a_n, n \geq 2$; $S_R^M = S_R \cap S^M$.

Функционал $I(f) = a_3 - \alpha a_2^2, a \in R$, был исследован Z. Jakubowski, A. Szwankowski. Максимум от $|I(f)|$ был найден для классов S, S^M, S_R. Оценки максимума от $I(f)$ в классе S_R и $|I(f)|$ в классе S, совпадают, если $\alpha \leq 1$. В данной работе отыскиваются точные верхняя и нижняя границы $I(f)$ в классе S_R^M. В частности показано что оценки $I(f)$ в классе S_R^M и $|I(f)|$ в классе S^M совпадают, если $\alpha \leq 1$. Главный результат следующая теорема:
Теорема:

Если $f \in S_R^M$, тогда

$$I(f) \leq \begin{cases} \frac{(5-4\alpha)}{M^2} - \frac{8(1-\alpha)}{M} + 3 - 4\alpha; & \alpha \leq \frac{1}{1-M} \\ \frac{2(\beta-1)^2}{M^2} + 1 - \frac{1}{M^2}; & (1-M) \leq \alpha \leq 1 - \frac{1}{\log M} \\ 1 - \frac{1}{M^2}; & \alpha \geq 1 - \frac{1}{\log M} \end{cases}$$

где $\beta \in (1, M)$ это единственный корень уравнения $\log \frac{\beta}{M} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} + \frac{1}{\beta} = 0$

$$I(f) \geq \begin{cases} \frac{1}{M^2} - 1; & \alpha \leq 1 \\ \frac{(5-4\alpha)}{M^2} - \frac{8(1-\alpha)}{M} + 3 - 4\alpha; & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Все оценки точные.

Эта теорема - пример применения оптимизации к экстремальным задачам для однолистных функций, разработанных одним из авторов, а конкретнее Прохоровым Дмитрием Валентиновичем. Рассмотрим уравнение Лёвнера в классе S_R^M:

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{1-w^2}{1-uw+w^2}, \tag{11}$$

где $w = z \quad$ при $\quad t = 0; -2 \leq u \leq 2; t \geq 0$

Интегралы $w(z,t)$ уравнения Лёвнера представляют собой всюду плотный подкласс класса S_R^M.

Пусть $w(z,t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + ...)$ - интеграл от диффиренцируемого уравнения Лёвнера (11). Для фиксированного $\alpha \in R$ мы обозначим $x_1(t) = a_2(t); x_2(t) = a_3(t) - \alpha a_2^2(t)$. Расширяя обе стороны (11) и приравнивая коэффициенты при z^2 и z^3 получается следующее управление динамической системы для $x_1(t)$ и $x_2(t)$

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = -ue^{-t}; x_1(0) = 0 \\ &\frac{dx_2}{dt} = (\alpha-1)2x_1ue^{-t} - (u^2-2)e^{-2t}; x_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Множество значений $D = \{(a_2, I(f)) : f \in S_R^M\}$ является множеством достижимости управляемой системы (12) в момент времени $t = \log M$. Граничные точки множества D достигаются только оптимальным управлением u, которое удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, то есть оно максимизирует функцию Гамильтона.

$$H(t, \chi, \Psi, u) = -\Psi_1 ue^{-t} + \Psi_2[2(\alpha-1)x_1ue^{-t} - (u^2-2)e^{-2t}],$$

где вектор $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ множителей Лагранжа удовлетворяющих сопряжённой гамильтоновой системе:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -2(\alpha - 1)ue^{-t}\Psi_2; \Psi_1(0) = c_1 \\
&\frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0; \Psi_2(0) = c_2.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Координаты вектора Ψ инвариантны относительно умножения Ψ на произвольное положительное число.

Вектор $\Psi(\log M)$ перпендикулярен границе ∂D множества D или к опорной прямой для ∂D если она существует. Следовательно, Ψ может быть нормирован так, что $\Psi(\log M) = (0, 1)$ в экстремальной точке $A \in \partial D$ максимизирующей $I(f)$ или $\Psi(\log M) = (0, -1)$ в экстремальной точке $B \in \partial D$ минимизирующей $I(f)$. Таким образом мы предполагаем, что $c_2 = 1$ и отсюда $\Psi_2 = 1$ в задаче на максимум $I(f)$ или $c_2 = -1$ и отсюда $\Psi_2 = -1$ в задаче на минимум $I(f)$.

Из правых частей уравнений (12) и (13) мы получим, что

$$\Psi_1(t) = 2(\alpha - 1)x_1(t)\Psi_2 + c_1. \tag{14}$$

Заключение. В выпускной работе было рассмотрено краткое изложение теории Лёвнера для единичного круга, принцип максимума Понтрягина, который был применён к решению экстремальной задачи об оценке коэффициентного функционала $I(f) = a_3 - \alpha a_2^2, \alpha \in R$ в классе S_R^M ограниченных однолистных функций с вещественными коэффициентами. Для детального изучения этой темы, необходимо было рассмотреть следующие аспекты:

- Основы теории Лёвнера для однолистных в единичном круге функций;
- Применение методов теории оптимального управления, а именно, принципа максимума Понтрягина, к решению экстремальных задач в классах однолистных функций;
- Решение задач с применением изученных методов.