МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики

Обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы
направления(специальности) 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета

Шнайдера Ильи Андреевича

Научный руководитель
Профессор, д.ф.-м.н.,профессор ______________ А.П. Хромов

Зав. кафедрой
Зав. каф., д.ф.-м.н., профессор ______________ С.И. Дудов

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Волновое уравнение - это линейное дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает распространение волн в среде.

Впервые волновое уравнение было получено для одномерного случая в 40-х годах 18-го века практически одновременно Д. Бернулли, Ж. Д'Аламбером и Л. Эйлером. Волновое уравнение описывает почти все разновидности малых колебаний в распределённых механических системах: продольные звуковые колебания в газе, жидкости, твёрдом теле; поперечные колебания в струнах, на поверхности жидкости и др. Волновым уравнениям удовлетворяют компоненты векторов электромагнитного поля и потенциалов, поэтому многие электромагнитные явления (в диапазоне частот от квазистатических до оптических) описываются с его помощью. В нелинейных средах такие явления, как взаимодействие монохроматических волн, возникновение и эволюция ударных волн и солитонов, самофокусировка и самоканализация волн, могут быть описаны с помощью нелинейных волновых уравнений. Таким образом, решение смешанной задачи для волновых уравнений является актуальной темой для исследования.

В работе рассматривается смешанная задача для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty),$$

при условиях

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x),$$

где области значений всех функций принадлежат полю комплексных чисел, а также

$$q(x) \in L[0,1], \quad \varphi(x) \in L[0,1], \quad \psi \in L[0,1]$$

и

$$f(x,t) \in L[Q_T], \quad Q_T = [0,1] \times [0,1], \ \forall T > 0.$$

Цель данной работы - рассмотреть формальное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения, привести теоретическое обоснование существования и получить явные выражения для обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения при различных условиях.

1. Абсолютно непрерывные функции и их свойства

В первом разделе работы рассматриваются вспомогательные сведения, необходимые для нахождения обобщенного решения смешанной задачи, в частности, теория абсолютно непрерывных функций и их свойства, теоремы о первообразной и производной абсолютно непрерывной функции, теорема Фубини для непрерывных функций.

2. Классическое решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения

Во втором разделе работы доказаны теоремы о существовании классического решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения при различных начальных и краевых условиях.

Будем рассматривать следующую смешанную задачу для неоднородного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty), \qquad (1)$$

при условиях

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \qquad (3)$$

где все функции являются комплекснозначными, а также

$$q(x) \in L[0,1], \quad \varphi(x) \in L[0,1], \quad \psi \in L[0,1]$$

и

$$f(x,t) \in L[Q_T], \quad Q_T = [0,1] \times [0,1], \ \forall T > 0.$$

Дадим определение классического решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения.

Определение 2.1 Классическим решением задачи (1)-(3) будем считать функцию $u(x,t)$, непрерывную одновременно с $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$, при этом функции $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$ являются абсолютно непрерывными по x и по t

соответственно, а также удовлетворяющую условиям (2.2) и (3) и почти всюду уравнению (1).

Таким образом, для нахождения классического решения задачи (1)-(3) будем считать, что функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ и $\psi(x)$ абсолютно непрерывны, и $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi''(x) \in L[0,1], \psi'(x) \in L[0,1]$.

Для нахождения классического решения задачи (1)-(3) применим метод Фурье с использованием резольвентного подхода, связанного с разбиением формального решения на части. Формальное решение задачи (1) - (3) согласно методу Фурье может быть найдено по формуле[3]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\Big[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} +$$

$$+ \int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}D\tau\Big]d\lambda. \tag{4}$$

Рассмотрим подробно эту формулу. Здесь $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора L: $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ - спектральный параметр, E -единичный оператор, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ обозначает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по $x, \lambda = \rho^2$, $Re\rho \geq 0$, γ_n - образ в λ-плоскости окружности $\tilde{\gamma_n} = \{\rho||\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, r - зафиксировано и достаточно велико, n_0 - номер - такой, что при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n \geq n_0$ расположены вне $|\lambda| = r$.

Классическое решение задачи (1)-(3), которое определяется по формуле (4), является единственным. Докажем теорему о единственности данного решения.

Теорема 2.1 Если $u(x,t)$ - классическое решение задачи (1)-(3), причем дополнительно $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$, $\quad Q_T = [0,1]\times[0,T]$, $\quad \forall T > 0$, то оно единственно и может быть найдено по формуле (4), где ряд справа сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Следствие 2.1. Если классическое решение смешанной задачи (1)-(3) единственно, то оно определяется по формуле (4), т.е. согласно методу Фурье.

Из формулы (4), полагая, что все классические решения берутся при условии $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ и $u(x,t)$ обозначает и сам ряд (4), и его сумму, получаем представление:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \tag{5}$$

где $u_1(x,t)$ есть выражение (4) при условиях $\psi(x) = f(x,t) = 0$, $u_2(x,t)$ есть выражение (4) при условиях $\varphi(x) = f(x,t) = 0$, $u_3(x,t)$ есть выражение (4) при условиях $\psi(x) = \varphi(x) = 0$.

Рассмотрим теперь смешанную задачу в случае $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$, а именно

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty), \tag{6}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0. \tag{8}$$

Теорема 2.2. Если $f(x,t) \in L[Q_T]$, то ряд *формального решения* задачи (6)-(8) по методу Фурье сходится при всех x и t и его сумма определяется выражением

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)d\eta, \tag{9}$$

где функция $\tilde{f}(\eta,\tau)$ - нечетная и 2-периодическая по η, причем $\tilde{f}(\eta,\tau) = f(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$. Эта теорема доказана в работах Хромова А.П. и Корнева В.В. об исследовании смешанной задачи неоднородного волнового уравнения при $f(x,t) \in L_2[Q_T]$ [3] и $f(x,t) \in L[Q_T]$[7]. Ввиду большого объема, приведем теорему без доказательства.

Теорема 2.3. Пусть функция $f(x,t) \in L[Q_T]$, абсолютно непрерывна по t почти при всяком x и $f'_t(x,t) \in L[Q_T]$, $\forall T > 0$. Тогда классисеское решение задачи (6)-(8) существует, и оно определяется по формуле (9), причем $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$.

Для доказательства теоремы определим и докажем необходимые утверждения в виде лемм. В силу теоремы 2.2 можем ограничиться проверкой того факта, что в данном случае формула (9) позволяет получить классическое решение. Без ограничения общности будем полагать функцию $f(x,t)$ абсолютно непрерывной по t для всех $x \in [0,1]$, поскольку для тех x, где это утверждение неверно, можем полагать $f(x,t)$ равной нулю, что не влияет на значение $u(x,t)$.

Лемма 2.1. $\forall\, t$ функция $f(x,t)$ суммируема по $x \in [0,1]$.

Лемма 2.2. Функция $f(x,t)$ непрерывна и $u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = 0$.

Лемма 2.3. Функция $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по t, причем имеет место выражение

Лемма 2.4. Функция $u(x,t)$ непрерыно дифференцируема по x, при этом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = J_1(x,t) - J_2(x,t). \tag{10}$$

Найдем теперь u''_{tt} u''_{xx}. Для этого в силу лемм 2.3 и 2.4 необходимо найти производные по x и t функций $J_1(x,t)$ и $J_2(x,t)$.

Лемма 2.5. При фиксированном x ф-я $J_1(x,t)$ абсолютно непрерывна по t, при этом при почти всех t

$$2\frac{\partial J_1(x,t)}{\partial t} = \tilde{f}(x+t,0) + \int_x^{x+t} \tilde{f}'_t(\xi, x+t-\xi)d\xi. \tag{11}$$

Лемма 2.6. При фиксированном t функция $J_1(x,t)$ абсолютно непрерывна по x и почти при всех x верно

$$2\frac{\partial J_1(x,t)}{\partial x} = \tilde{f}(x+t,0) - \tilde{f}(x,t) + \int_x^{x+t} \tilde{f}(\xi, x+t-\xi)d\xi. \tag{12}$$

Аналогично леммам 2.5 и 2.6, легко получить соответствующие утверждения и для $J_2(x,t)$.

Лемма 2.7. При фиксированном x ф-я $J_2(x,t)$ абсолютно непрерывна по t, при этом при почти всех t

$$2\frac{\partial J_2(x,t)}{\partial t} = \tilde{f}(x-t,0) + \int_{x-t}^{x} \tilde{f}'_t(\xi, \xi-x+t)d\xi. \tag{13}$$

Лемма 2.8. При фиксированном t функция $J_2(x,t)$ абсолютно непрерывна по x и почти при всех x верно

$$2\frac{\partial J_2(x,t)}{\partial t} = \tilde{f}(x,t) - \tilde{f}(x-t,0) - \int_{x-t}^{x} \tilde{f}'_t(\xi, \xi-x+t)d\xi. \tag{14}$$

Завершим доказательство теоремы 2.3. Из лемм 2.3 и 2.4 следует, что функция $u(x,t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и t, причем $u'_t(x,0) = 0$, то есть, согласно лемме 2.2, начальные и граничные условия теоремы выполняются. В силу лемм 2.5-2.8 и выражений (13), (14) делаем вывод, что функции $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по x и по t соответственно и п.в. верно

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial t}(u'_t(x,t))-\frac{\partial}{\partial x}(u'_x(x,t)))=$$
$$=J'_{1t}(x,t)+J'_{2t}(x,t)-J'_{1x}(x,t)+J'_{2x}(x,t$$

$$\frac{1}{2}\Bigg[\tilde f(x+t,0)+\int_x^{x+t}\tilde f'_t(\xi,x+t-\xi)d\xi+\tilde f(x-t,0)-\int_{x-t}^{x}\tilde f'_t(\xi,\xi-x+t)d\xi-\tilde f(x+t,0)+$$
$$+\tilde f(x,t)-\int_x^{x+t}\tilde f'_t(\xi,x+t-\xi)d\xi+\tilde f(x,t)-\tilde f(x-t,0)-\int_{x-t}^{x}\tilde f'_t(\xi,\xi-x+t)d\xi\Bigg]=\tilde f(x,t),$$

то есть уравнение (2.1) выполняется почти всюду. В силу лемм 2.5 и 2.7 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\in L[Q_T]$. Таким образом, все утверждения теоремы верны и теорема 2.3 полностью доказана. □

3. Обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения

В третьем разделе доказаны теоремы о существовании обобщенного решения смешанной задачи и получена формула для его нахождения.

Пусть теперь $u_1(x,t)$ - классическое решение задачи (1)-(3) при условии $\psi(x)=f(x,t)=0$. Представим ряд формального решения задачи по методу Фурье

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r}+\sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\Big[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t+(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}+$$
$$+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}D\tau\Big]d\lambda$$

для $u_1(x,t)$ в виде

$$u_1(x,t)=u_{10}(x,t)+u_{11}(x,t), \tag{15}$$

где $u_{10}(x,t)$ может быть получено из $u_1(x,t)$ путем замены $R_\lambda\varphi$ на $R^0_\lambda\varphi$; $u_{11}(x,t)$ может быть получено из $u_1(x,t)$ путем замены $R_\lambda\varphi$ на $R_\lambda\varphi-R^0_\lambda\varphi$; где $R^0_\lambda=(L^0-\lambda E)^{-1}$, L^0 - L при $q(x)=0$.

Поскольку $u_{10}(x,t)=a_0(x,t)$ - классическое решение задачи (1)-(3) в случае $q(x)=\psi(x)=f(x,t)=0$ и $\frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial t^2}\in L[Q_T]$, имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u_{10}(0,t) = u_{10}(1,t) = 0,$$

$$u_{10}(x,0) = u'_{10,t}(x,0) = 0.$$

Обозначим буквой П множество всех нечетных и 2-периодичных по x на всей оси функций $f(x,t)$. П является образом линейной операции $\widetilde{f}(x,t)$ продолжения $f(x,t)$ по x с отрезка $[0,1]$ на всю ось. Если $f(x,t) \in П$, то и $\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\eta,\tau)d\eta$. Будем полагать, что $q(x)$ продолжена четно и 2-периодично на всю числовую ось. Таким образом, если $f(x,t) \in П$, то и $q(x)f(x,t) \in П$. Отсюда следует, что $u_{11}(x,t)$ - классическое решение (1)-(3) с условиями $\frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ и $\varphi(x) = \psi(x) = 0, \;\; f(x,t) = f_0(x,t)$, где

$$f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t \geq 0. \tag{16}$$

и имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_{11}(x,t) + f_0(x,t),$$

$$u_{11}(0,t) = u_{11}(1,t) = 0,$$

$$u_{11}(x,0) = u'_{11,t}(x,0) = 0.$$

По теореме 2.1 о единственности классического решения, для $u_{11}(x,t)$ имеет место формула:

$$u_{11}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int\limits_{\gamma_n} \Big) \int_0^t R_\lambda f_0(\cdot,\tau) \frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho} d\lambda. \tag{17}$$

Аналогично представлению $u_1(x,t)$ представим ряд (17) в виде

$$u_{11}(x,t) = a_1(x,t) + u_{12}(x,t), \tag{18}$$

где $a_1(x,t)$ может быть получено из (17) путем замены R_λ на R^0_λ, $u_{12}(x,t)$ получается путем замены R_λ на $R_\lambda - R^0_\lambda$.

Теорема 3.1 Если $u_1(x,t)$ - классическое решение задачи (6)-(8) при $\psi(x) = f(x,t) = 0$, то

$$u_1(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t) \tag{19}$$

и ряд $A(x,t)$ абсолютно и равномерно сходится по $x,t \in Q_T$ при $\forall\, T > 0$.

Следствие 3.1 Функция $u_{12}(x,t)$ - классическое решение задачи (2.1)-(2.3) при условиях

$$\frac{\partial^2 u_{12}(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T], \quad \varphi(x) = \psi(x) = 0, \quad f(x,t) = -q(x)a_1(x,t).$$

Следствие 3.2

Из доказательства теоремы видно, что ряд $A(x,t)$ сходится и в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$, и имеет место выражение

$$A(x,t) = v(x,t) \in L[Q_T]. \tag{20}$$

В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 3.2 Если функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $L_\varphi \in L_p[0,1](p > 1)$, то классическое решение задачи (1)-(3) существует при любом $T > 0$ и может быть найдено по формуле

$$u_1(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t). \quad \square$$

Теорема 3.3 Пусть $\varphi(x) \in L[0,1]$ и $u_{1h}(x,t)$ - классическое решение задачи(1)-(3) для $u_1(x,t)$ с $\varphi_h(x)$ вместо $\varphi(x)$ и $\lim\limits_{h\to 0} ||\varphi_h - \varphi||_1 = 0$. Тогда $\lim\limits_{h\to 0} ||u_{1h}(x,t) - v(x,t)||_{L[Q_T]} = 0$.

Теорема 3.4 Если $u_2(x,t)$ - классическое решение задачи (1)-(3) при условиях $\varphi(x) = f(x,t) = 0$, то верно равенство

$$u_2(x,t) = B(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x,t),$$

где

$$b_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g_{n-1}(\eta,\tau)d\eta, \quad n \geq 1,$$
$$g_n(x,t) = -q(x)b_n(x,t), \quad n \geq 0,$$

причем ряд $B(x,t)$ сходится аболютно и равномерно на отрезке Q_T при любом $T > 0$.

Как показано в работе [5], такое классическое решение существует в том случае, когда $\psi(x)$ - абсолютно непрерывная функция и выполняются условия: $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\psi'(x) \in L_2[0,1]$.

Ряд $B(x,t)$ также сходится абсолютно и равномерно на Q_T при любых $\psi(x) \in L[0,1]$. Для этого случая также имеет место теорема 3.3, при этом из $\lim\limits_{h\to 0} ||\psi_h - \psi||_1 = 0$ следует $\lim\limits_{h\to 0} ||u_{2h}(x,t) - B(x,t)||_{C[Q_T]} = 0$. Таким образом, $B(x,t)$ можно рассматривать как *обобщенное решение* задачи (1)-(3) для $u_2(x,t)$.

Пусть теперь $u_3(x,t)$ из формулы $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)$ - классическое решение задачи (1)-(3)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty),$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x),$$

при начальных условиях $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ и функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Представим ряд (4) для $u_3(x,t)$ в виде суммы

$$u_2(x,t) = u_{30}(x,t) + u_{31}(x,t),$$

где функция $u_{30}(x,t)$ получена из $u_3(x,t)$ путем замены $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ на $R^0_\lambda(f(\cdot,\tau))$, а функция $u_{31}(x,t)$ - из $u_3(x,t)$ путем замены $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ на $R_\lambda(f(\cdot,\tau)) - R^0_\lambda(f(\cdot,\tau))$.

Теорема 3.5 Если $u_3(x,t)$ -классическое решение задачи (1)-(3) при условиях $\varphi(x) = \psi(x,t) = 0$ и функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3, то верно равенство

$$u_3(x,t) = D(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x,t),$$

где

$$d_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} m_{n-1}(\eta,\tau)d\eta, \quad n \geq 1,$$

$$m_n(x,t) = -q(x)d_n(x,t), \quad n \geq 0,$$

причем ряд $D(x,t)$ сходится аболютно и равномерно на отрезке Q_T при любом $T > 0$.

Как показано в работе [3], такое классическое решение существует в том случае, когда функции $f(x,t)$ и $f'_t(x,t)$ непрерывны, а также выполняется равенство $f(0,t) = f(1,t) = 0$.

Ряд $D(x,t)$ сходится при любой $f(x,t) \in L[Q_T]$. Теорема 3.2 выполняется и в этом случае, причем из $\lim\limits_{h\to 0} ||f_h(x,t) - f(x,t)||_{L[Q_T]} = 0$ следует $\lim\limits_{h\to 0} ||u_{3h}(x,t) - D(x,t)||_{C[Q_T]} = 0$, следовательно, $D(x,t)$ можно рассматривать как обобщенное решение (1)-(3) для $u_3(x,t)$.

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 3.6 Пусть выполняются условия $\varphi \in L[0,1], \quad \psi \in L[0,1], \quad f(x,t) \in L[Q_T], \quad Q_T = [0,1] \times [0,T], \forall T > 0$. Тогда обобщенное решение задачи (1)-(3) существует, и может быть найдено по формуле (21):

$$u(x,t) = A(x,t) + B(x,t) + D(x,t). \tag{21}$$

4. Решение краевых задач для нормальных систем дифференциальных уравнений

В четвертом разделе работы описана разработанная программа на языке Python 3.8, реализующая поиск численного решения краевых задач для нормальных систем дифференциальных уравнений методом пристрелки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в полном объеме рассмотрено нахождение классического и обобщенного решений смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения в случаях различных начальных и граничных условий. Такие задачи повсеместно встречаются в разных разделах физики при исследовании процессов и явлений, связанных с колебаниями и описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Первый раздел работы содержит необходимые вспомогательные теоретические сведения. Во втором разделе доказана теорема о существовании классического решения смешанной задачи, необходимая для дальнейшего нахождения обобщенного решения. В третьем разделе получен основной результат работы - теорема о существовании обобщенного решения смешанной задачи и выражение для его нахождения. В четвертом разделе этой работы разработана программа на высокоуровневом языке программирования общего назначения Python, позволяющая получать численные решения краевых задач для нормальных систем неоднородных линейных дифференциальных уравнений методом пристрелки, и визуализировать полученные результаты.