МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ ПО ПРЕДДИПЛОМНОЙ (РАССРЕДОТОЧЕННОЙ) ПРАКТИКЕ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02— Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Витулев Арсения Михайловича

Место прохождения практики: кафедра математического и компьютерного моделирования

Сроки прохождения практики: с 07.02.2022 по 05.05.2022

Оценка:

Руководитель практики
доцент, к.ф.-м.н., доцент Е.Ю.Крылова

Саратов 2022 г.

Введение. Данная работа относится к области управления нелинейными механическими системами. Дана задача о гашении колебаний груза, прикрепленого на конце упругой балки, с помощью активного динамического гасителя. Схема гасителя выглядит так: Гаситель расположен на некой платформе, удаленной от корпуса КА с помощью длинной штанги. Он состоит из направляющей, которая расположена перпендикулярно оси штанги, сама штанга, а также подвижная масса, которая перемащется вдоль направляющей, при помощи управляющей силы(например электропривода). Такая задача является разновидностью целого класса задач, связанных с управляемыми системами при ограничениях. Управляющей величиной u в данном случае будет являться сила взаимодействия между грузом и гасителем, что отличает такую задачу, например, от задачи об управлении системой осцилляторов. Где дана система математических маятников, подвешенных к некому телу, и движущихся горизонтально с ускорением u. В задаче об АДГ сложными ограничениями выступают: одно на управляющую силу, обусловленное ограниченными возможностями привода, другое на величину смещения подвижной массы относительно платформы, из-за конечности хода массы гасителя (так как направляющая гасителя имеет конечные размеры).

Цель работы:

Построить управление u, удовлетворящее определенным ограничениям, а также найти время окончания движения - T.

Структура бакалаврской работы:

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Во введении описывается область работы и ставится цель. В первой главе рассматривается постановка задачи активного динамического гасителя. Во второй главе рассматривается матричная техника решения задачи. В третьей главе рассматривается нахождение оптимального времени T, а также приводятся оценки для управляющей функции u, в соответствии с рисунком 1. В приложении приводится программа аналитического решения и результаты в виде графиков.

Основное содержание работы. Для начала введем основные уравнения и ограничения, связанные с задачей об активном динамическом гасителе.

Также дается постановка задачи и практический смысл. Для описания модели постановки задачи может быть выбрана следущая модель: двухмассовая механическая система, содержащая колебательное звено - Два тела с массами m1 и m2 перемещаются по горизонтальной прямой. Тело 1 соединено с пружиной жесткостью c>0, тело 2 соединено с 1 телом приводом, который и обеспечивает силу u.

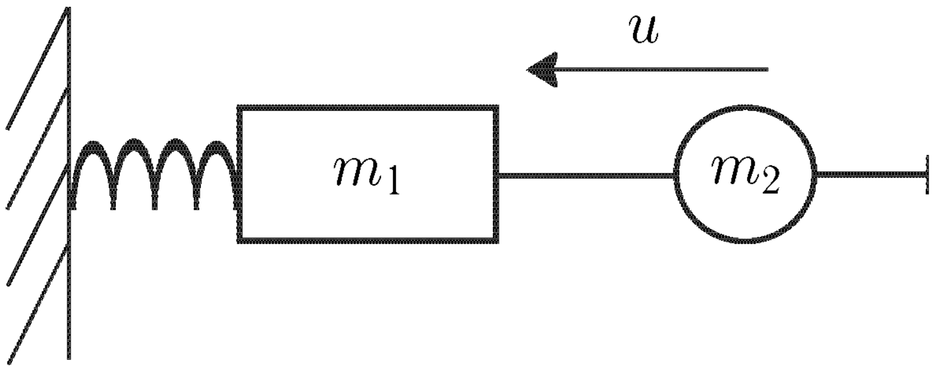

Рисунок 1 — Двухмассовая упрощенная система с гасителем

Уравнения движения этой системы имеют вид:

$$m_1\ddot{y} + cy = -u, \quad m_2\ddot{z} = -u, \tag{1}$$

где y — координата 1 тела, z — координата 2 тела.

Рассмотрим ограничения для этой задачи. Ограничение на управляющую силу:

$$|u(t)| \leq a, \quad a > 0, \tag{2}$$

Ограничение на величину смещения 2 тела относительно 1:

$$|z(t) - y(t)| \leq d, \quad d > 0, \tag{3}$$

Введем начальное состояние:

$$y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad z(0) = z^0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}^0, \tag{4}$$

а также конечное состояние(состояние покоя):

$$y(T) = z(T) = 0, \;\; \dot{y}(t) = \dot{z}(t) = 0. \tag{5}$$

Необходимо построить управление u, удовлетворящее ограничению (3) и переводящее систему (2) из начального состояния (5) в состояние покоя - (6), при том координаты $y(t)$ и $z(t)$ должны удовлетворять ограничению (4), во время движения. Время окончания движения - Т не задано.

Ход решения : Попробуем привести нашу систему к более простой

$$\ddot{x}_1 + x_1 = u, \;\; \ddot{x}_3 = u, \tag{6}$$

$$|u| \leq 1. \tag{7}$$

Такая система хороша, потому что отсутсвует массы и коэффициент жесткости, а значит мы можем решать задачу в более общем случае, не смотря на технические параметры самого устройства гасителя. Чтобы привести первую систему ко второй воспользуемся заменой переменных на безразмерные. А именно:

$$x_1 = \frac{c}{a}y, \;\; x_3 = -\frac{m_2 c}{m_1 a}z, \;\; t' = \sqrt{\frac{c}{m_1}}t, \;\; u' = -au. \tag{8}$$

Далее будем считать для простоты, что все t' это t, а u' это u, также везде точками будут обозначены производные по новому времени t'. Тогда получаем уравнение : $\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + x = u$, или же: $\ddot{x}_1 + x_1 = u$ Тогда ограничение (4) перепишется в виде:

$$\left|\frac{m_1 x_3}{m_2} + x_1\right| \leq \frac{cd}{a}. \tag{9}$$

Условия (5) и (6) после замены предстанут в виде:

$$x_i(0) = {x_i}^0, \;\; x_i(T) = 0, \;\; i = 1, ..., 4, \tag{10}$$

где ${x_i}^0$ - некоторые заданные постоянные, Т - неизвестное конечное время. Поставленная задача сводится к нахождения управления, удовлетворяющему ограничению $|u| \leq 1$, переводящему систему (7) из заданного начального (11) в начало координат, кроме того должно соблюдаться фазовое ограничение (10).

Далее представим решение данной задачи в виде матричных уравнений. Перепишем систему (7) в виде векторного равенства:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Начальные и конечные условия запишутся в виде:

$$x(0) = x^0, \quad x(T) = 0, \tag{12}$$

Выражение для управляющей функции $u(t)$ запишется таким образом:

$$u(t) = \langle V(t,T), x^0 \rangle, \quad V(t,T) = -R^{-1}(T)Q(t). \tag{13}$$

Затем опишем процесс нахождения времени окончания T. Попробуем определить время окончания процесса - T. Для этого будем оценивать функцию $\nu(T)$ аналитическим образом. Вспомним как мы вводили эту функцию, а именно:

$$\nu(T) = \max_{0 \le t \le T} ||V(t,T)||_\infty. \tag{14}$$

Выберем в качестве момента времени $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, из соображений простоты, так как у нас получаются в матрице косинусы и синусы и при, таком T они будут равны 0 и 1, тогда матрица $R(T)$, где $\sin = \sin(T)$, а $\cos = \cos(T)$

$$R(T) = \begin{bmatrix} \frac{(T - \sin\cos)}{2} & -\frac{\sin^2}{2} & \sin - T\cos & \cos - 1 \\ -\frac{\sin^2}{2} & \frac{T + \cos\sin}{2} & 1 - \cos - T\sin & \sin \\ \sin - T\cos & 1 - \cos - T & \frac{T^3}{3} & -\frac{T^2}{2} \\ \cos - 1 & \sin & -\frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \tag{15}$$

упрощается, так как при $T = 2\pi k : \sin(T) = 0, \cos(T) = 1$

$$R(T) = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} & 0 & -T & 0 \\ 0 & \frac{T}{2} & 0 & 0 \\ -T & 0 & \frac{T^3}{3} & -\frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Попробуем найти обратную матрицу $R^{-1}(T)$, во первых выясним существует ли она, для этого посчитаем определитель матрицы $R^(T)$ - он должен быть отличен от нуля: Определитель нашей матрицы $\triangle = T^2 - 24$ Тогда обратная матрица к $R(T)$ будет иметь вид:

$$R^{-1}(T) = \frac{1}{\triangle} \begin{bmatrix} 2T & 0 & \frac{24}{T} & 12 \\ 0 & \frac{2\triangle}{T} & 0 & 0 \\ \frac{24}{T} & 0 & \frac{12}{T} & 6 \\ 12 & 0 & 6 & \frac{4(T^2-6)}{T} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где $\triangle = T^2 - 24$ - определитель матрицы $R(T)$. Выпишим компоненты вектора $V(t, T)$, используя выражения 17 и ... для матрицы $R^{-1}(T)$ и ветора Q(t), и используем оценку $T \geq 2\pi$, т.к. при $k = 1 : \ T = 2\pi$, а при $k = 2, 3, 4, ... : \ T > 2\pi$:

$$|V_1(t, T)| = \frac{|2T^2 \sin(t) + 24t - 12T|}{T\triangle} \leq \frac{2T + 12}{\triangle} \leq \frac{4T}{\triangle},$$

$$|V_2(t, T)| = \frac{|2\cos(t)|}{T} \leq \frac{2}{T} \leq \frac{4T}{\triangle},$$

$$|V_3(t, T)| = \frac{|-24\sin(t) - 12t + 6T|}{T\triangle} \leq \frac{6T + 24}{T\triangle} \leq \frac{4T}{\triangle},$$

$$|V_4(t, T)| = \frac{|-12T\sin(t) - 6Tt + 4T^2 - 24|}{T\triangle} \leq \frac{4T}{\triangle}.$$

Из выше полученных оценок следует что

$$\nu(T) \leq \frac{4T}{\triangle}, \tag{18}$$

Далее следует что оценка для управляющей функции $u(t)$ выглядит следующим образом:

$$\max_{0 \le t \le T} |u(t)| \le \frac{4T}{T^2 - 24} ||x^0||_1. \tag{19}$$

После этого сделаем нашу задача в программе Python и найдем, а также проанализируем графики для характеристик процесса. В соответсвии с рисунком 1, рисунком 2 и рисунком 3 видно что управляющая сила находится в диапазоне от -1 до 1(не выходит за границы), что соответствует нашему аналитическому ограничению.

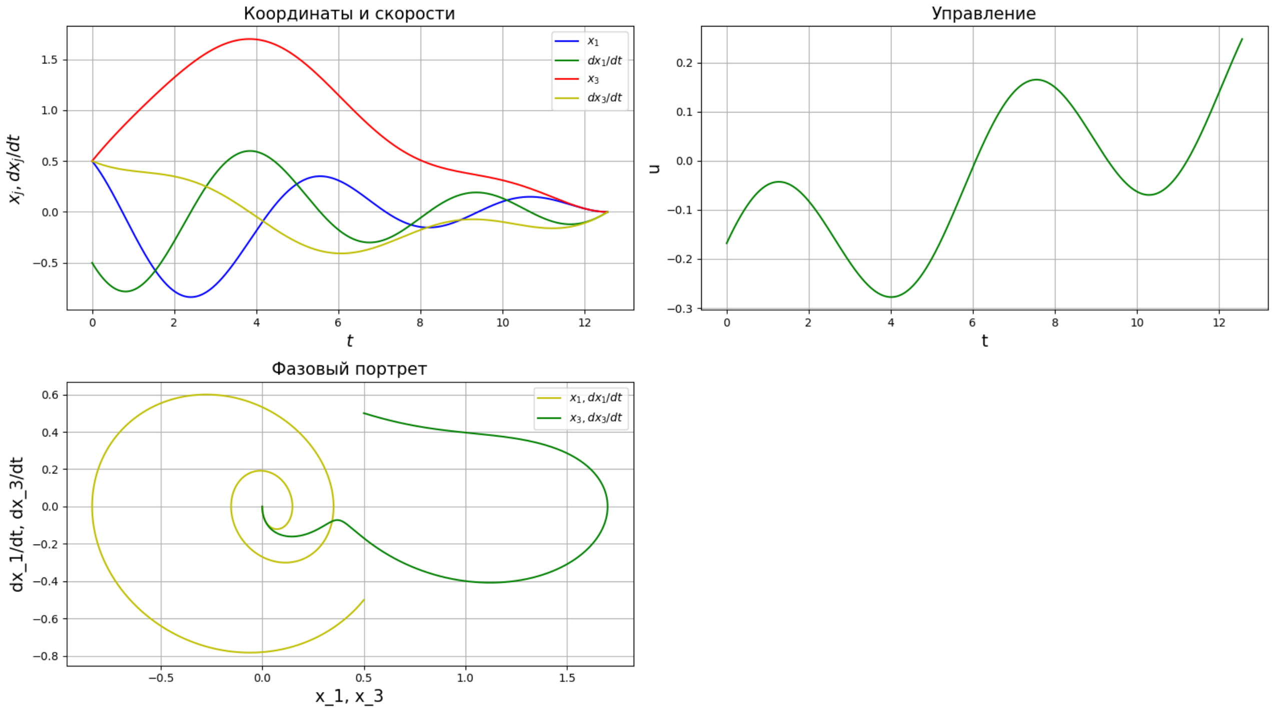

Рисунок 2 — Состояние при $k = 2, T = 4\pi, x_0 = (1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$

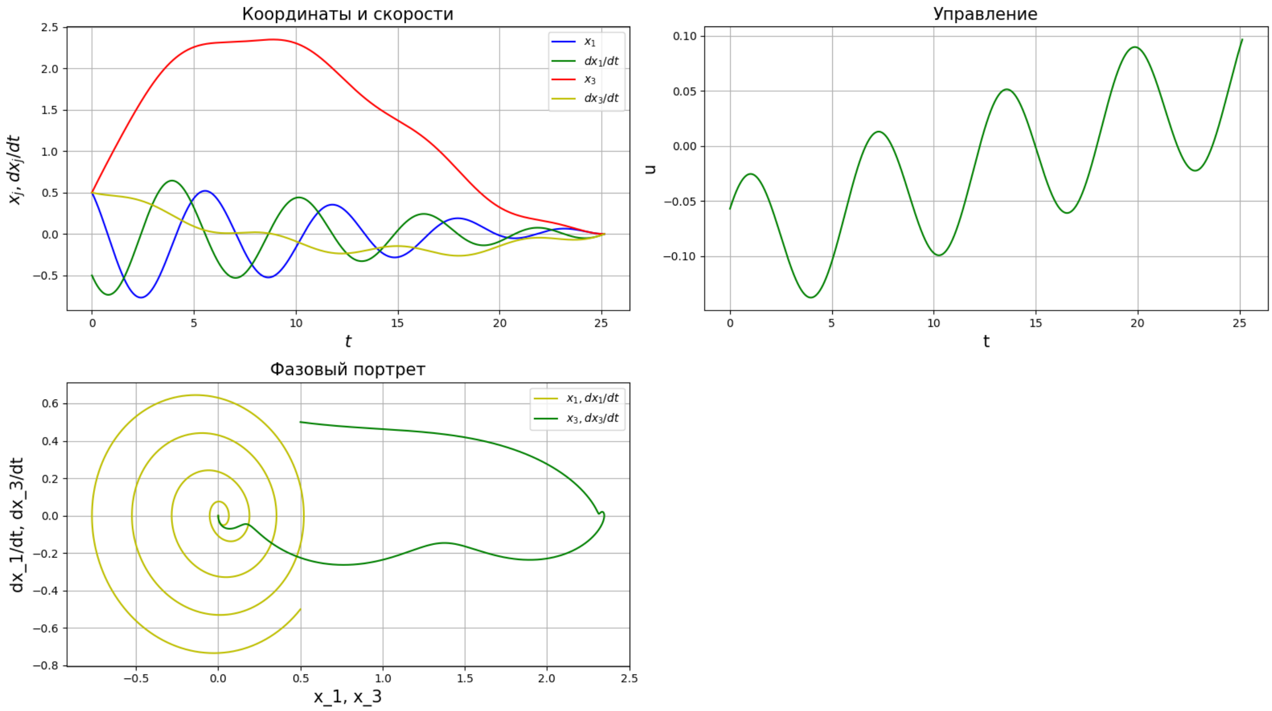

Рисунок 3 — Состояние при $k = 4, T = 8\pi, x_0 = (1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$

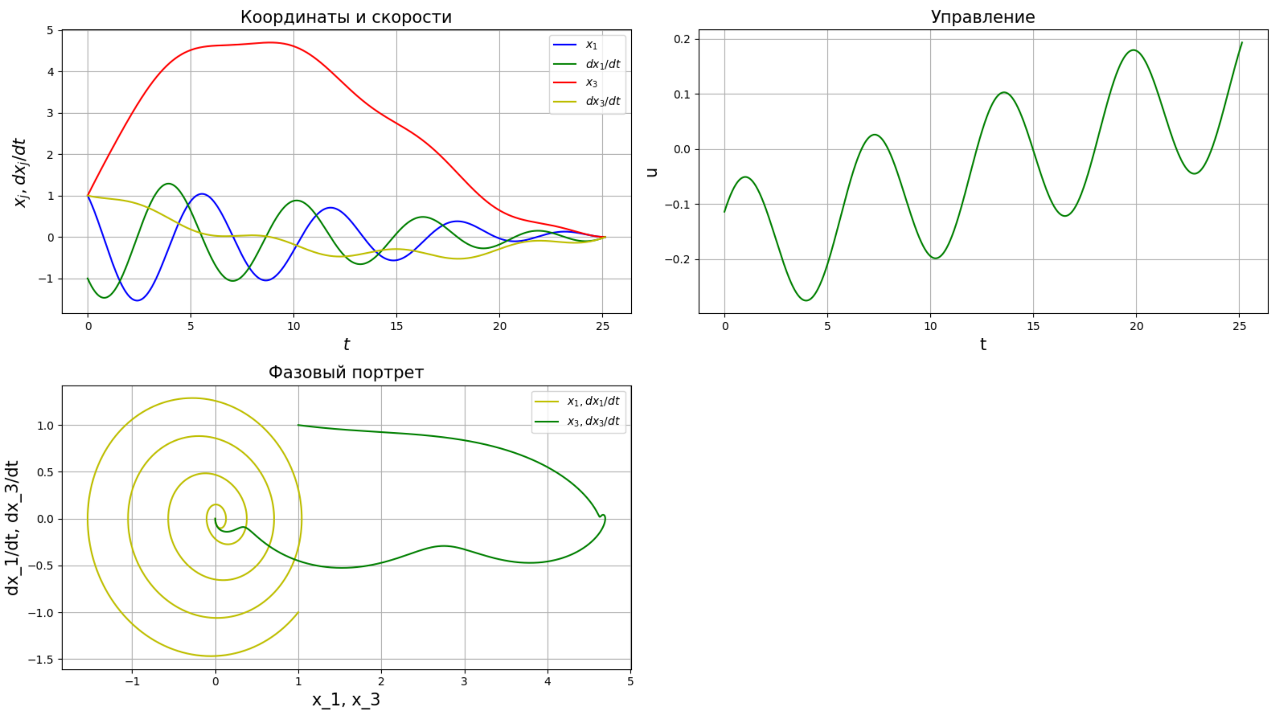

Рисунок 4 — Состояние при $k = 4, T = 8\pi, x_0 = (1, -1, 1, 1)$

Скорости координаты тоже в определенный момент времени принимают значение 0. Также можно сделать вывод, в соответствии с рисунком 1 и рисунком 2, что при увеличении параметра k, а именно времени T=2pi*k, зависимости координат скорости и т.д. не меняются, меняется лишь время, а нам нужно найти min k. Также из аналитического ограничения и практического решения видно что при k=1 решения нету, т.е. мы можем сделать вывод, что время 2pi недостаточно большое, для выполнения условий задачи. При изменении начальных условий видно, что меняется как и значения скорости в каждый момент времени, так и амплитуда для управляющей величины - чтобы сохранить ограничение необходимо увеличивать параметр k, тогда увеличиться время T, в соответствии с рисунком 2 и рисунком 3.

Заключение. В ходе работы была рассмотрена задача о гашении колебаний при помощи активного динамического гасителя. В первой главе дается постановка задачи, основные уравнения и ограничения. Во второй главе описывается решение задачи при помощи использования матричных неравенств. В третьей главе дается метод нахождения времени окончания процесса - T, и уравнения и ограничения на это время. В четвертой главе приводится пример активного динамического гасителя, используемого в космических аппаратах, даются конкретные параметры гасителя, также приводятся графики управления, координат, скорости, фазовый портрет, и анализ этих графиков. В приложении приводится программа и ее результаты. В процессе выполнения работы были приобретены навыки работы с языком программирования Python. Все проведенные в работе исследования позволили детально изучить поведение активных динамических гасителей, а также методы решения такого рода нелинейных задач.