МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Равномерная устойчивость восстановления целых функций типа синуса по их нулям

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента __4___ курса ___411_____ группы

направления_01.03.02 - Прикладная математика и информатика___________________

код и наименование направления

_______________механико-математического факультета________________________

наименование факультета, института, колледжа

_____________________Зохина Никиты Александровича_______________________

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент____ _________________ ___С.А.Бутерин____

должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор________ __________________ ____В.А. Юрко___

должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2022

Введение Одной из задач математической физики является задача определения вида дифференциального оператора по некоторой совокупности его собственных значений, известная, как обратная. Первые существенные результаты в этой области (после основополагающей работы В. А. Амбарцумяна) были получены Боргом, который доказал однозначность восстановления вещественного потенциала оператора Штурма—Лиувилля по спектральным данным этого оператора, т. е. нулям двух характеристических функций.

Однако не менее важной, чем задача восстановления оператора по его спектру, является задача получения устойчивости этого восстановления. Это свойство, крайне важное для обоснования численных алгоритмов, имеет локальный характер, поскольку оно гарантирует, что небольшие погрешности любых фиксированных входных данных, вызванные ошибками измерения, могут привести только к небольшим погрешностям решения.

В рамках исследований этой области были получены результаты для более «сильного», нежели описанный выше, типа устойчивости, относящегося к равномерной устойчивости, которая предполагает произвольность входных данных. В частности, подобные результаты были получены для потенциалов-распределений из пространств Соболева. Впоследствии была получена равномерная устойчивость обратных задач и для некоторых классов интегро-дифференциальных операторов, причем использовался уже иной подход, частью которого стало доказательство равномерной устойчивости восстановления характеристической функции рассматриваемого оператора по ее нулям.

Более того, дальнейшее изучение этой темы привело к нахождению более общего подкласса целых функций, для которого справедливо данное обобщение. В качестве такого подкласса были рассмотрены всевозможные произведения алгебраических многочленов и функций типа синуса с асимптотически отделенными нулями, для которых, помимо равномерной устойчивости восстановления, были также получены теоремы об асимптотике нулей и об эквивалентном представлении этих целых функций в виде бесконечного произведения. Эти результаты имеют практическое применение в исследовании различных аспектов прямых и обратных задач, в том числе равномерной устойчивости последних.

Целью данной работы является демонстрация описанных выше результатов исследования равномерной устойчивости восстановления целых функций типа синуса по их нулям.

Основное содержание работы. Бакалаврская работа содержит введение, четыре раздела, заключение, список использованных источников и одно приложение.

В первом разделе рассмотрена равномерная устойчивость восстановления первообразных вещественных потенциалов из пространства Соболева в качестве предварительного этапа работы.

Во втором разделе приведены результаты исследования равномерной устойчивости восстановления целых функций типа синуса по их нулям.

В третьем разделе описанные результаты были применены к целым функциям типа синуса при фиксированной функции $S(z)$; для этих функций были выведены формулы восстановления по их нулям и проведено исследование равномерной устойчивости этого восстановления с описанием процесса.

В четвертом разделе приведены использованные в работе понятия и факты.

Равномерная устойчивость восстановления первообразных вещественных потенциалов из пространства Соболева. Оператор Дирихле определяется равенством:

$$L_D y = Ly = -(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y,$$

его область определения имеет вид

$$\mathscr{D}(L_D) = \{y, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi] : Ly \in L_2[0,\pi], y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

Оператор Дирихле—Неймана определяется аналогично: $L_{DN}y = Ly$ на области

$$\mathscr{D}(L_{DN}) = \{y, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi] : Ly \in L_2[0,\pi], y(0) = y^{[1]}(\pi) = 0\}.$$

В задаче Борга потенциал восстанавливается по двум спектрам $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ операторов L_D и L_{DN}.

Для вещественных потенциалов спектры $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ операторов L_D и

L_{DN} удовлетворяют условию перемежаемости

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \ldots < \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1} < \ldots . \tag{1}$$

Теорема 1. *При любом фиксированном $\theta \geqslant 0$ отображение $F : \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ есть биекция.*

Теорема 2. *Отображение $F : W^\theta_{2,\mathbb{R}} \to \hat{\Omega}^\theta$ есть биекция. Последовательности чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ являются спектрами операторов L_D и L_{DN}, если и только если они удовлетворяют условиям перемежаемости (1) и $\{s_k\}_1^\infty \in l^\theta_B$.*

Теорема 3. *Фиксируем $\theta > 0$. Пусть последовательности $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$ регуляризованных спектральных данных лежат в $\Omega^\theta(r, h)$. Тогда прообразы $\sigma = F^{-1}\mathbf{y}$, $\sigma_1 = F^{-1}\mathbf{y}_1$ лежат в $\mathscr{B}^\theta_\Gamma(R)$ и справедливы оценки*

$$C_1\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_\theta \leqslant \|\sigma - \sigma_1\|_\theta \leqslant C_2\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_\theta,$$

где число R и постоянные C_1, C_2 зависят только от r и h. Число R и постоянные C_2, C_1^{-1} увеличиваются при $r \to \infty$ или $h \to 0$. Обратно, если σ, σ_1 лежат в шаре $\mathscr{B}^\theta_\mathbb{R}(R)$, то последовательности $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$ регуляризованных спектральных данных этих функций лежат в $\Omega^\theta(r, h)$ и справедливы оценки

$$C_1\|\sigma - \sigma_1\|_\theta \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_\theta \leqslant C_2\|\sigma - \sigma_1\|_\theta.$$

Здесь числа $r > 0$, $h \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ и постоянные C_1 и C_2 зависят только от R. Числа r, h, C_2 и C_1^{-1} увеличиваются при $R \to \infty$.

Равномерная устойчивость восстановления целых функций типа синуса по их нулям. В первую очередь в рассмотрение следует ввести целую функцию вида

$$\theta(z) = S(z) + \int_{-b}^{b} w(x)e^{izx}\,dx, \quad S(z) = P_N(z)S_0(z), \quad w(x) \in L_2(-b, b), \tag{2}$$

где $P_N(z)$ — алгебраический многочлен степени N, а $S_0(z)$ — функция типа синуса экспоненциального типа b, нули которой z_n^0, $n \in \mathbb{N}$, асимптотически отделены ($\inf |z_n^0 - z_k^0| > 0$ при $n \neq k$ и $n, k \gg 1$), при фиксированных $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $b > 0$. Согласно определению целой функции типа синуса (типа b), найдутся положительные константы c, C и K, при которых выполняется двусторонняя оценка

$$c < |S_0(z)| e^{-|\operatorname{Im} z| b} < C, \quad |\operatorname{Im} z| > K.$$

Согласно принципу Фрагмена—Линделёфа, верхняя оценка верна и для всех $z \in \mathbb{C}$. Кроме того, для $S_0(z)$ справедлива следующая нижняя оценка:

$$|S_0(z)| \geqslant c_\delta e^{|\operatorname{Im} z| b}, \quad \operatorname{dist}(z, \{z_n^0\}_{n \geqslant 1}) \geqslant \delta > 0, \tag{3}$$

где $c_\delta > 0$ зависит только от δ. Следствием этих уточнений и принципа максимума модуля является следующая оценка: найдутся такие N_1 и N_2, что

$$0 < N_1 < |S_0'(z_n^0)| < N_2 < \infty, \tag{4}$$

коль скоро z_n^0 является простым нулем функции $S_0(z)$.

К виду $P_N(z) S_0(z)$ может быть приведена любая целая функция вида

$$S(z) = \sum_{j=0}^{N} z^{N-j} s_j(z), \quad s_j(z) = O(e^{|\operatorname{Im} z| b}), \quad z \to \infty, \quad j = \overline{0, N},$$

где $s_0(z)$ — некоторая функция типа синуса с асимптотически отделенными нулями.

Обозначим

$$\mu_n := \begin{cases} z_n^0, & z_n^0 \neq 0, \\ -1, & z_n^0 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\{z_n^0\}_{n=\overline{1-N,0}}$ — нули многочлена $P_N(z)$.

Теорема 4. *Всякая функция $\theta(z)$ вида (2) обладает бесконечным множе-*

ством нулей $\{z_n\}_{n\geqslant 1-N}$, *которые, в свою очередь, имеют вид*

$$z_n = z_n^0 + \frac{\varkappa_n}{\mu_n^N}, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2. \tag{6}$$

Лемма 1. *Для всякой ограниченной последовательности* $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ *имеет место включение* $\{f(z_n^0+\alpha_n)\}_{n\geqslant 1} \in l_2$, *где* $\{z_n^0\}_{n\geqslant 1}$ — *последовательность нулей* $S_0(z)$.

Теорема 5. *При фиксированной* $S(z)$ *функция* $\theta(z)$ *однозначно определяется заданием всех своих нулей за исключением любых* N *штук, т. е. заданием последовательности* $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$.

Кроме того, справедливо представление

$$\theta(z) = \alpha e^{\beta z} \prod_{n=1-N}^{\infty} \frac{z_n - z}{\mu_n} e^{z/\mu_n}, \tag{7}$$

где $\beta = s + \gamma$, *а* s — *кратность нуля* $S(z)$ *в точке ноль, и*

$$\alpha = \lim_{z\to 0} \frac{S(z)}{z^s}, \quad \gamma = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \ln \frac{S(z)}{z^s}. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть* $S_0(z)$ — *некоторая функция типа синуса типа* b *с асимптотически отделенными нулями* $\{z_n^0\}_{n\geqslant 1}$, *а* $\{\kappa_n\}_{n\geqslant 1}$ — *произвольная последовательность из* l_2. *Обозначим* $z_n := z_n^0 + \kappa_n$, $n \in \mathbb{N}$, *считая для удобства, что кратные* z_n *занумерованы подряд:* $z_n = \ldots = z_{n+m_n-1}$, *где* m_n — *кратность* z_n *в последовательности* $\{z_k\}_{k\geqslant 1}$. *Положим*
$\sigma := \{n : z_n \neq z_{n-1},\, n-1 \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ *и*

$$r_{k+\nu}(x) := x^\nu e^{iz_k x}, \quad k \in \sigma, \quad \nu = \overline{0, m_k - 1}.$$

Тогда система функций $\{r_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ *образует базис Рисса в* $L_2(-b,b)$.

Теорема 6. *Зафиксируем* $S(z)$ *из* (2). *Тогда для любой комплексной последовательности* $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ *вида* (6) *найдется единственный набор чисел* $\{z_n\}_{n=\overline{1-N,0}}$ *такой, что функция* $\theta(z)$, *определяемая формулами* (7) *и* (8), *имеет вид* (2).

Если числа $\{z_n\}_{n=\overline{1-N,0}}$ *также выбраны произвольным образом, то со-*

ответствующая функция $\theta(z)$ примет вид

$$\theta(z) = S(z) + P_{N-1}(z)S_0(z) + \int\limits_{-b}^{b} \tilde{w}(x)e^{izx}\,dx, \quad \tilde{w}(x) \in L_2(-b,b), \tag{9}$$

где $P_{N-1}(z)$ — некоторый многочлен степени, меньшей N.

Теперь необходимо ввести в рассмотрение наряду с $\theta(z)$ еще одну функцию $\tilde{\theta}(z)$ того же вида (2) и с той же главной частью $S(z)$, но с другой подынтегральной функцией $w(x)$:

$$\tilde{\theta}(z) = S(z) + \int\limits_{-b}^{b} \tilde{w}(x)e^{izx}\,dx, \quad \tilde{w}(x) \in L_2(-b,b).$$

Для определенность следует принять следующие обозначения: если некоторый символ ω обозначает объект, относящийся к $\theta(z)$, то тот же символ с тильдой $\tilde{\omega}$ будет обозначать аналогичный объект, соответствующий функции $\tilde{\theta}(z)$, и $\hat{\omega} := \omega - \tilde{\omega}$.

Теорема 7. *Для любого $r > 0$ справедлива оценка*

$$||\hat{w}||_{L_2(-b,b)} \leqslant C_r||\{\mu_n^N \hat{z}_n\}_{n\geqslant 1-N}||_{l_2}, \tag{10}$$

коль скоро $||\{\mu_n^N(z_n - z_n^0)\}_{n\geqslant 1-N}||_{l_2} \leqslant r$ и $||\{\mu_n^N(\tilde{z}_n - z_n^0)\}_{n\geqslant 1-N}||_{l_2} \leqslant r$.

Демонстрация равномерной устойчивости восстановления целой функции типа синуса при фиксированной $S(z)$. Для практической демонстрации равномерной устойчивости восстановления целой функции типа синуса по ее нулям введем функции

$$\theta(z) = \sin \pi z + \int\limits_{-\pi}^{\pi} w(x)e^{izx}\,dx, \quad w(x) \in L_2(-\pi,\pi), \tag{11}$$

$$\tilde{\theta}(z) = \sin \pi z + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{w}(x)e^{izx}\,dx, \quad \tilde{w}(x) \in L_2(-\pi,\pi). \tag{12}$$

Нули функций $\theta(z)$ и $\tilde{\theta}(z)$ имеют вид

$$z_n = n + \varkappa_n, \quad \tilde{z}_n = n + \tilde{\varkappa}_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varkappa_n\}$ и $\{\tilde{\varkappa}_n\}$ — нули функций $w(x)$ и $\tilde{w}(x)$ соответственно.

Пусть последовательность $\{\varkappa_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ содержит ровно M нетривиальных нулей функции $w(x)$. Иными словами, нули $w(x)$ можно представить в виде

$$\varkappa_{n_M} = \begin{cases} \varkappa_n, & n = \overline{p, p+M-1}, \\ 0, & n \neq \overline{p, p+M-1}. \end{cases} \tag{13}$$

Тогда нули функции $\theta(z)$ будут иметь представление

$$z_{n_M} = \begin{cases} n + \varkappa_n = z_n, & n = \overline{p, p+M-1}, \\ n, & n \neq \overline{p, p+M-1}. \end{cases} \tag{14}$$

Разложим функцию $w(x)$ в ряд Фурье. Это разложение будет иметь следующий вид:

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n e^{inx}, \quad w_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} w(x) e^{-inx}\, dx,$$

откуда, в силу (11) и (14), имеем

$$w_n = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \theta(n), & n = \overline{p, p+M-1}, \\ 0, & n \neq \overline{p, p+M-1}. \end{cases} \tag{15}$$

Далее, по теореме 2.0.2 для функции $\theta(z)$ справедливо представление

$$\theta(z) = \pi e^z \prod_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z_n - z}{\mu_n} e^{z/\mu_n},$$

поскольку

$$\alpha = \lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi, \quad \gamma = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \ln \frac{\sin \pi z}{z} = 0, \quad \beta = 1 + \gamma = 1,$$

$$\mu_n = \begin{cases} n, & n \neq 0, \\ -1, & n = 0. \end{cases}$$

В результате некоторых преобразований получаем окончательный вид коэффициентов ряда Фурье для функции $w(x)$:

$$w_n = (-1)^{n+1} \frac{\varkappa_n}{2} \prod_{\substack{k \neq n \\ k=p}}^{p+M-1} \frac{k + \varkappa_k - n}{k - n}, \quad n = \overline{p, p+M-1}. \tag{16}$$

Тогда сама функция $w(x)$ имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=p}^{p+M-1} \left[(-1)^{n+1} \varkappa_n \prod_{\substack{k \neq n \\ k=p}}^{p+M-1} \frac{k + \varkappa_k - n}{k - n} \right] e^{inx}.$$

Пример. Выберем радиус равным $r = 0.2$ и сгенерируем 20 пар из 30 чисел. С результатом ее выполнения можно ознакомиться на рисунке 1.

```
Radius: 0.2
Number of non-zero roots: 30

Sequence of kappa_n: (-0.007997-0.0230168j) (-0.0337532-0.0216581j) ... (-0.0020516-0.0111074j)

Sequence of tilde(kappa_n): (-0.0021849+0.0077284j) (0.0208235+0.0340318j) ... (-0.0317322-0.0324676j)

Sequence of w_n: (0.004878+0.0107531j) (-0.0158827-0.0087839j) ... (-0.0007871-0.0056396j)

Sequence of tilde(w_n): (0.0011999-0.0037961j) (0.0092566+0.0190971j) ... (-0.0155153-0.0205391j)

Constants C_r in uniform stability condition:
[0.49536049 0.49590995 0.49867301 0.50308297 0.49729595 0.49185323
 0.50391277 0.50367507 0.49907314 0.50017731 0.50287533 0.50012421
 0.50182569 0.50257165 0.49950865 0.50365627 0.49854133 0.50759571
 0.49619715 0.50205327]

Largest constant C_r:
0.5075957110974297
```

Рисунок 1 – Пример 1

Заключение. В ходе работы были рассмотрены новые результаты из теории обратных спектральных задач, относящиеся к вопросу равномерной устойчивости восстановления оператора по его спектру, т. е., по нулям его характеристической функции. В качестве предварительного этапа была рассмотрена задача Борга и равномерная устойчивость восстановления первообразных вещественных потенциалов из пространства Соболева.

Далее была введена в рассмотрение целая функция, представленная в виде произведения алгебраических многочленов и функций типа синуса с асимптотически отделенными нулями, для которой были продемонстрированы теоремы о единственности восстановления по нулям и о равномерной устойчивости этого восстановления.

В завершение эти результаты были рассмотрены для конкретной функции типа синуса и реализованы в виде программного кода на языке Python.

Поскольку задачи, обозначенные в начале бакалаврской работы, были решены в ходе ее выполнения, цель работы — демонстрация результатов исследования равномерной устойчивости восстановления целых функций типа синуса по их нулям — можно считать достигнутой.