МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, КАК МЕТОД РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Борисовой Дианы Арсеновны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ М. Г. Плешаков

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2022

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Задача нелинейного программирования встречается в естественных науках, технике, экономике, математике, в сфере деловых отношений и в науке управления государством.

Нелинейное программирование, связано с решением множества экономических задач. Так, например в задаче о распределении ограниченных ресурсов максимизируют либо эффективность, либо, если изучается потребитель, потребление при наличии ограничений, которые выражают условия ограниченности ресурсов. В такой общей постановке математическая формулировка задачи может оказаться невозможной, но в конкретных применениях количественный вид всех функций может быть определен непосредственно.

Метод "затраты – эффективность"также укладывается в схему нелинейного програмирования. Данный метод был разработан для использования при принятии решений в управлении государством. Общей функцией эффективности является благосостояние. Здесь возникают две задачи нелинейного программирования: первая – максимизация эффекта при ограниченных затратах, вторая – минимизация затрат при условии, чтобы эффект был выше некоторого минимального уровня. Обычно эти задачи хорошо моделируются с помощью нелинейного программирования.

Результаты решения задачи нелинейного программирования являются подспорьем при принятии государственных решений. Полученное решение является, естественно, рекомендательным, поэтому необходимо исследовать предположения и точность постановки задачи нелинейного программирования, прежде чем принять окончательное решение.

Задачи нелинейного программирования часто возникают и в других отраслях науки. Так, например, в физике целевой функцией может быть потенциальная энергия, а ограничениями – различные уравнения движения. В общественных науках и психологии возникает задача минимизации социальной напряженности, когда поведение людей подчинено определенным законам.

Целью бакалаврской работы является изучение методов решения задач нелинейного программирования, а также применение этих методов для решения конкретных задач.

Объект исследования – задачи нелинейного программирования.

Предмет исследования: возможность применения методов нелинейного программирования к решению конкретных экономических задач.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

— решить выбранную задачу нелинейного программирования методом Лагранжа;

— представить компьютерную реализацию выбранных задач нелинейного программирования в среде пакетов Excel и Python.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, 3 разделов, списка использованных источников, приложений

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы и её практическая значимость, формируется цель работы и ставятся основные задачи.

В **первом** разделе работы приведены основные математические модели в экономике рассматриваемые далее в работе.

Можно выделить 3 этапа проведения математического моделирования в экономике:

1. ставятся цели и задачи исследования, проводится качественное описание объекта в виде экономической модели.

2. формируется математическая модель изучаемого объекта, осуществляется выбор методов исследования. Далее исследуется модель с помощью этих методов.

3. осуществляется обработка и анализ полученных результатов.

Характеристика методов решения задач оптимизации. В настоящее время для решения оптимальных задач применяют в основном следующие методы:

Методы исследования функций классического анализа представляют собой наиболее известные методы решения несложных оптимальных задач. Обычной областью использования данных методов являются задачи с известным аналитическим выражением критерия оптимальности, что позволяет найти не очень сложное, также аналитическое выражение для производных;

Метод множителей Лагранжа применяют для решения задач такого же класса сложности, как и при использовании обычных методов исследования функций, но при наличии ограничений типа равенств на независимые переменные. К требованию возможности получения аналитических выражений для производных от критерия оптимальности при этом добавляется аналогичное требование относительно аналитического вида уравнений ограничений;

Методы вариационного исчисления обычно используют для решения задач, в которых критерии оптимальности представляются в виде функционалов и решениями которых служат неизвестные функции. Такие задачи возникают обычно при статической оптимизации процессов с распределенными параметрами или в задачах динамической оптимизации;

Динамическое программирование служит эффективным методом решения задач оптимизации дискретных многостадийных процессов, для которых критерий оптимальности задается как аддитивная функция критериев оптимальности отдельных стадий. Без особых затруднений указанный метод можно распространить и на случай, когда критерий оптимальности задан в другой форме, однако при этом обычно увеличивается размерность отдельных стадий;

Принцип максимума применяют для решения задач оптимизации процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений. Достоинством математического аппарата принципа максимума является то, что решение может определяться в виде разрывных функций; это свойственно многим задачам оптимизации, например задачам оптимального управления объектами, описываемыми линейными дифференциальными уравнениями;

Линейное программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для решения оптимальных задач с линейными выражениями для критерия оптимальности и линейными ограничениями на область изменения переменных. Такие задачи обычно встречаются при решении вопросов оптимального планирования производства с ограниченным количеством ресурсов, при определении оптимального плана перевозок (транспортные задачи) и т. д.;

Методы нелинейного программирования применяют для решения оптимальных задач с нелинейными функциями цели. На независимые переменные могут быть наложены ограничения также в виде нелинейных соотношений, имеющих вид равенств или неравенств. По существу методы нелинейного программирования используют, если ни один из перечисленных выше методов не позволяет сколько-нибудь продвинуться в решении оптимальной задачи. Поэтому указанные методы иногда называют также прямыми методами решения оптимальных задач;

В последнее время разработан и успешно применяется для решения определенного класса задач метод геометрического программирования. Этот метод решения одного специального класса задач нелинейного программирования, в которых критерий оптимальности и ограничения задаются в виде позиномов - выражений, представляющих собой сумму произведений степенных функций от независимых переменных.

Во **втором** разделе приводится задача нелинейного программирования в общем виде и ее методы, необходимые для решения задач в третьем разделе.

Математическая модель задачи нелинейного программирования в общем виде формулируется следующим образом:

$f = (x_1, x_2, ..., x_n) \to min(max)$. При этом переменные должны удовлетворять ограничениям:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_m, \\ g_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b_{m+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b_k, \\ g_{k+1}(x_1, x_2, ..., x_n) = b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_p(x_1, x_2, ..., x_n) = b_p. \end{cases}$$

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$, где хотя бы одна из функций f, g_i нелинейная.

Для ЗНП нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся метод множителей Лагранжа, градиентные методы и т.д.

Метод множителей Лагранжа. С помощью данного метода по существу устанавливаются необходимые условия, позволяющие идентифицировать точки оптимума в задачах с ограничениями в виде равенств. При этом задача с ограничениями потребуется в эквивалентную задачу безусловной оптимизации, в которой фигурируют некоторые неизвестные параметры, называемые множителями Лагранжа.

Метод градиента. Идея метода заключается в том, что находятся значения частных производных по всем независимым переменным, которые определяют направление градиента в рассматриваемой точке и осуществляется шаг в направлении обратном направлению градиента, т.е. в направлении наибыстрейшего убывания целевой функции (если ищется минимум).

В **третьем** разделе приводится вычислительный эксперемент. У произвольной задачи нелинейного программирования некоторые или все свойства, характерные для задач линеного программирования, отсуствуют. Для задач нелинейного программирования не существует общего универсального метода их решения (аналогично симплексному методу).

Для решения методом множителей Лагранжа нелинейного программирования, была рассмотрена задача определения оптимального плана производства. Известен рыночный спрос на некоторое изделие в количестве 180 ед. Это изделие может быть изготовлено двумя предприятиями одного концерна по различным технологиям. Если изделие изготавливается на первом предприятии в количестве x_1 ед., то затраты на его производство составят $4x_1 + x_1^2$ руб. При изготовлении изделия в количестве x_2 ед. на втором предприятии затраты составят $8x_2 + x_2^2$ руб.

Определить, сколько изделий, изготовленных на разных предприятиях, может предложить коцерн, чтобы общие издержки на его производство были минимальными.

Составим математическую модель для решения задачи. Издержки производства при изготовлении x_1 изделий на первом предприятии и x_2 на втором составят:

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 = 180; \quad x_1, x_2 \geq 0; \quad x_1, x_2 - \text{целые}.$$

Математическая модель данной задачи состоит в нахождении значений переменных x_1, x_2, при которых функция $F(x_1, x_2)$ принимает минимальное значение.

Алгоритм метода множителей Лагранжа решения ЗНП:

Этап 1. Составляют функцию Лагранжа

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (b_j - g_j(x_1, ..., x_n)).$$

Этап 2. Находят частные производные функции Лагранжа по x_i и λ_j и приравнивают их к нулю.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \\ g_j(x_1, ..., x_n) = b_j, \quad j = \overline{1, m} \end{cases}$$

Этап 3. Решают систему и определяют точки, в которых функция $f(x_1, ..., x_n)$ может иметь экстремум.

Этап 4. Проверяют полученные на этапе 3 точки на экстремум и определяют экстремальное значение функции f найденной точки.

Для ее расчета применим метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2).$$

Найдем частные производные функции L по x_1, x_2 и λ и приравняем их к нулю. Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda + 4 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda + 8 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, найдем $x_1 = 91, \quad x_2 = 89, \quad \lambda = 186, \quad F(x_1, x_2) = 17278.$

Таким образом, получили оптимальное решение задачи, при котором 91 изделие производится на первом предприятии, 89 – на втором. При этом издержки производства составят 17278 р.

В пакете Excel была рассмотрена таже задача определения оптимального плана производства. С математической моделью:

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 = 180; \quad x_1, x_2 \geq 0; \quad x_1, x_2 - \text{целые.}$$

Математическая модель данной задачи состоит в нахождении значений переменных x_1, x_2, при которых функция $F(x_1, x_2)$ принимает минимальное значение. Заполняем рабочий лист данными, как показано на рисунке 1.

	A	B	C	D	E
1		**Объемы производства**			
2		x_1	x_2	**Суммарное количество изделий**	**Ограничение на спрос**
3				=B3+C3	180
4					
5	**Издержки производства**	=4*B3+B3^2+8*C3+C3^2			

Рисунок 1 – Таблица с исходными данными и необходимыми формулами

Для решения задачи подключаем инструмент Excel – Поиск решения. Находим минимум целовой функции, решаем задачу методом обобщенного приведенного градиента (ОГП) и вводим ограничения. После чего на рабочем листе отобразится решение задачи рисунок 2

В результате решения задачи получили оптимальное решение, при ко-

	A	B	C	D	E
1		**Объемы производства**			
2		x_1	x_2	**Суммарное количество изделий**	**Ограничение на спрос**
3		91	89	180	180
4					
5	**Издержки производства**	17278			

Рисунок 2 – Решение задачи

тором 91 изделие производится на первом предприятии, 89 – на втором. При этом издержки производства составят 17278 р., что совпадает с решением этой задачи методом множителей Лагранжа.

На языке Python была решена экономическа задача на нахождение минимального риска, используя функцию минимизации scipy. Чттобы помочь владельцам ресторанов вновь открыть свой бизнес во время пандемии COVID-19, правительство создало обобщенный индекс риска (CRI) $CRI = 4x_1^2 - 4x_1^4 + x_1^{\frac{6}{3}} + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4$, чтобы помочь владельцам понять, насколько рисковано открывать свои места для отдыха в помещении x_1 и на открытом воздухе x_2.

Владелец ресторана, хочет вновь открыть свой ресторан с минимальным риском. Однако он понимает, что для этого, чтобы дать своим сотрудникам достойные часы работы, ему придется освободить как минимум 10% мест в помещении и 25% на открытом воздухе. Каков самый безопасный способ (согласно CRI) для владельца возобновить свой бизнес?

Составим математическую модель для решения задачи:

$$minz = 4x_1^2 - 4x_1^4 + x_1^{\frac{6}{3}} + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4$$

при условии

$$x_1 \geq 0,1; \quad x_2 \geq 0,25; \quad x_1, x_2 \leq 1.$$

Изобразим проблему и ее ограничения, чтобы получить лучшее представление о том, какого результата ожидать. Для этого создадим набор значений для x_1 и x_2 между 0 и 1, чтобы отображать значения целевой функции в каждой из этих точек на контурном графике рисунка 3

Эта функция имеет локальные минимумы в районе $x_1 = 1$ и $x_2 = 0,6$.

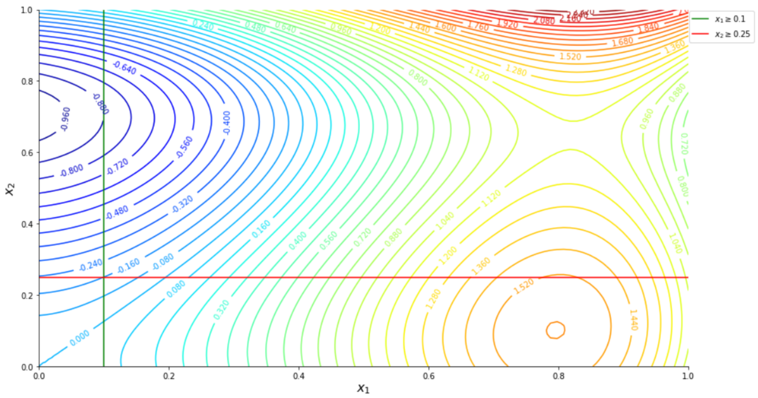

Рисунок 3 – Значение целевой функции

Имея это в виду был использован алгоритм оптимизации с несколькими запусками, чтобы избежать локальных минимумов.

Чтобы реализовать многозаходный подход, сначала была определна простая функция, которая генерирует список случайных начальных точек в пределах допустимого диапазона. После нужно определить целевую функцию проблемы, ограничения и границы в формате, который принимает scipy.

Было создано 50 случайных начальных точек. На каждой итерации проверялось, успешно ли решатель нашел лучшее решение, чем раньше, и если это так, то мы сохраняем его как "лучшее"решение. В конце проверка, было ли лучшее решение успешным, и если да, то выводим оптимальные значения как на рисунке 4

```
Оптимальное решение найдено:
	-  Доля мест в помещении, которые необходимо предоставить: 0.1
	-  Доля мест для сидения на открытом воздухе, которые необходимо сделать доступными: 0.701
	-  Оценка индекса риска: -0.88
```

Рисунок 4 – Результат работы

Результат работы: многозаходный оптимизатор успешно нашел глобальный минимум. Владелец может минимизировать свой обобщенный индекс риска до значения -0,88, открыв 10% своих мет в помещении и 70% на улице.

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты

1. определены основные понятия математических моделей в экономике;
2. изучены характеристики методов решения задач оптимизации;

3. решена задача нелинейного программирования методом множителей Лагранжа;
4. представлена компьютерная реализация выбранных задач нелинейного программирования в среде пакета Excel и на языке Python.