МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Рожкова Артёма Александровича

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2022

Введение. Большой класс систем, которые сложно изучить аналитическими способами, но которые хорошо изучаются методами статистического моделирования, сводится к системам массового обслуживания.

Системы массового обслуживания (СМО) представляют собой системы специального вида, реализующие многократное выполнение однотипных задач. Модели СМО применяются во многих областях экономики, финансов, производства и быта, для изучения режимов функционирования обслуживающих систем, и исследования явлений, возникающих в процессе обслуживания.

Каждый день мы сталкиваемся с различными формами обслуживания и обслуживающими системами. В качестве таких систем могут выступать телефонные станции, диспетчерские службы таксопарков, магазины, салоны красоты, банки, рестораны быстрого обслуживания и так далее. Все эти системы состоят из определенного числа обслуживающих приборов, в качестве которых могут фигурировать различные приборы, аппараты, линии связи, люди и т. п. Главная функция систем массового обслуживания заключается в удовлетворении поступающего в нее потока заявок. Заявки поступают в систему одна за одной в случайные моменты времени, время обслуживания каждой заявки так же случайно.

Данная тема актуальна так как имитационное моделирование является мощным инструментом исследования поведения реальных систем. Построенные имитационные модели СМО могут применяться для расчета экономических характеристик эффективности функционирования реальных систем обслуживания. Методы имитационного моделирования позволяют собрать необходимую информацию о поведении системы с помощью создания ее компьютеризованной модели. Эта информация так же используется далее для проектирования системы.

Целью бакалаврской работы является моделирование, анализ и оптимизация замкнутых систем массового обслуживания.

Объектом исследования являются замкнутые системы массового обслуживания (ЗСМО).

Предмет исследования – обслуживание заявок поступающих в замкнутую систему массового обслуживания.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие задачи:

— изучить основные понятия, связанные с СМО и ЗСМО;
— построить модели ЗСМО;
— рассчитать основные характеристики ЗСМО на основе имитационной модели и по теоретическим формулам;
— провести сравнительный анализ систем.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, что на основании построенной компьютеризированной модели ЗСМО можно проводить исследования реально существующих обслуживающих систем (предприятий), рассчитывать характеристики этих систем. По результатам этих вычислений можно делать выводы о состоятельности и эффективности предприятий.

В первом разделе рассмотрена замкнутая система обслуживания . Это тот случай, когда входящий поток требований больше не является пуассоновским потоком, поступающим в систему из источника с неограниченным числом требований, а создается конечным числом источников нагрузки. Структура системы такова, что имеется всего Z источников нагрузки; требование находится либо в системе, либо в источнике нагрузки. Предполагается, что все источники действуют независимо друг от друга, направляя в систему пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. После обслуживания требования возвращаются в источники. Если источник направил в систему очередное требование, то следующее требование он направит лишь после возвращения в него обслуженного требования. Если в некоторый момент времени в системе находится n требований, то поступить в систему требования могут только от $Z - n$ источников. Следовательно, входящий в систему поток требований является пуассоновским, но его интенсивность $(Z-n)\lambda$ изменяется дискретным образом, когда имеет место поступление очередного требования в систему или завершение обслуживания текущего требования.

Обозначим через μ интенсивность обслуживания требований одним прибором. Подходящей моделью для описания такой системы является процесс размножения и гибели при следующем выборе параметров:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(Z-n), & 0 \le n \le Z, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, 0 \le n \le \kappa, \\ \kappa\mu, n \ge \kappa. \end{cases}$$

Таким образом,

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{\kappa^{n-\kappa}} \frac{n!}{\kappa!} C_Z^n, \quad 1 \le n \le Z.$$

Используя условие $\sum\limits_{n=0}^{Z} p_n = 1$, получим

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\kappa-1} C_Z^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum\limits_{n=\kappa}^{Z} C_Z^n \frac{n!}{\kappa! \kappa^{n-\kappa}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}.$$

В стационарном режиме средняя интенсивность входящего потока требований в систему

$$\hat{\lambda} = (Z - \bar{n})\lambda.$$

Коэффициент использования системы

$$\psi = \frac{\hat{\lambda}}{\kappa\mu} = \frac{\lambda(Z-\bar{n})}{\kappa\mu}.$$

Среднее число требований в системе

$$\bar{n} = Z - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0).$$

Среднее число требований в очереди

$$\bar{b} = Z - \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0) - (1-p_0) = Z - (1-p_0)\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Среднее время пребывания требований в системе

$$\bar{u} = \frac{\bar{n}}{\mu\,(1-p_0)} = \frac{Z}{\mu\,(1-p_0)} - \frac{1}{\lambda}.$$

Среднее время ожидания в очереди

$$\bar{w} = \frac{\bar{b}}{\mu\,(1-p_0)} = \frac{Z}{\mu\,(1-p_0)} - \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Во втором разделе рассмотрены принципы имитационного моделирования систем массового обслуживания. *Имитационное моделирование* есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы. Таким образом, процесс имитационного моделирования это процесс, включающий и конструирование модели, и аналитическое применение модели для изучения некоторой проблемы.

Система $\hat{S}$ состоит из объектов: источник требований, очередь требований системы обслуживания, прибор системы обслуживания, требование. Объектам системы $\hat{S}$ ставятся в соответствие объекты имитационной модели.

В имитационной модели различаются события трех типов: *поступление требования* в систему массового обслуживания, *начало обслуживания требования* прибором системы обслуживания и *уход требования* из системы массового обслуживания после завершения обслуживания.

Процесс функционирования системы $\hat{S}$ в имитационной модели представляется в виде логически связанной последовательности событий на оси модельного времени. Эта последовательность характеризуется интервалами времени между событиями и типом событий.

В третьем разделе приведены основные понятия и возможности MatLab.

В четвертом разделе построена имитационная модель системы массового обслуживания типа $M/M/\kappa/\infty/Z$.

Система массового обслуживания состоит из κ обслуживающих приборов. В системе имеется Z источников нагрузки. Требование может находиться либо в системе обслуживания, либо в источнике нагрузки. От каждого источника в очередь системы обслуживания поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Длительность обслуживания требований прибором является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром μ. Построим имитационную модель такой системы $\hat{S}$. На основе этой модели вычислим оценки характеристик ψ, $\overline{u}$, $\overline{w}$, $\overline{n}$, $\overline{b}$ системы обслуживания.

Если в момент поступления очередного требования в системе в системе имеется свободный обслуживающий прибор, то требование сразу поступает на обслуживание. Если на момент поступления очередного требования все приборы заняты, то требование помещается в очередь. Из очереди на обслуживание требования поступают согласно дисциплине $FCFS$. После обслуживания требование возвращается в свой источник. Источник генерирует очередное требование только после того, как предыдущее требование обслужилось и вернулось в источник.

Состояние системы определяется количеством требований, находящихся в системе. Смена состояния системы обслуживания происходит либо в момент поступления очередного требования, либо в момент, когда обслуженное требование покидает систему. Таким образом, главными событиями в модели является прибытие и уход требования.

Требуется определить следующие статистические характеристики работы системы:

1) $\widetilde{\psi}$ - коэффициент использования системы требованиями;

2) $\widetilde{b}$ – среднее число требований в очереди;

3) $\widetilde{n}$ - среднее число требований в системе;

4) $\widetilde{w}$ - среднее время ожидания в очереди требования;

5) $\widetilde{u}$ - среднее время пребывания требования в системе;

Для нахождения указанных характеристик в системе Matlab была написана программа, моделирующая работу данной СМО.

Входными данными программы являются следующие:

– λ - интенсивность входящего потока требований (число требований в час);

– μ - интенсивность обслуживания требований (число требований в час);

– κ - количество обслуживающих приборов;

– Z - количество источников;

– n - общее число требований.

Случайные величины для входящего потока и времени обслуживания генерируются с помощью встроенных команд системы Matlab. Время между последовательным поступлением требований генерируется функцией $exprnd(1/\lambda)$ с параметром λ, время обслуживания – аналогичной функцией с параметром μ.

В процессе работы программы создаются массивы.

Массив tr – матрица размерности $n \times 3$, с номер строки отвечает за очередное требование, поступившее в систему обслуживания и обслужившееся в ней. Первый столбец содержит момент времени поступления требования в систему обслуживания, второй столбец – длительность обслуживания, третий столбец – момент ухода требования из системы после обслуживания.

Массив nn – массив размерности $\kappa \times n$, который содержит информацию о том, какие требования на каком приборе обслуживались.

Выходными данными программы являются следующие статистические характеристики:

– $\widetilde{\psi}$ - коэффициент использования системы;

– $\widetilde{n}$ - среднее число требований в системе;

– $\widetilde{b}$ - среднее число требований в очереди;

– $\widetilde{w}$ - среднее время ожидания в очереди;

– $\widetilde{u}$ - среднее время пребывания требования в системе.

Коэффициент использования системы считается по формуле:

$$\widetilde{\psi} = \frac{\text{суммарное время обслуживания требований}}{\text{время моделирования}},$$

Среднее число требований в системе считается по формуле:

$$\widetilde{n} = \frac{\text{суммарное время пребывания требований в системе}}{\text{время моделирования}},$$

Среднее число требований в очереди считается по формуле:

$$\widetilde{b} = \frac{\text{суммарное время ожидания требований в очереди}}{\text{время моделирования}},$$

Среднее время ожидания требования в очереди считается по формуле:

$$\widetilde{w} = \frac{\text{суммарное время ожидания требований в очереди}}{\text{количество требований}},$$

Среднее время пребывания требования в системе:

$$\widetilde{u} = \frac{\text{суммарное время пребывания требования в системе}}{\text{количество требований}}.$$

В результате работы, была создана имитационная модель замкнутой системы массового обслуживания $M/M/\kappa/\infty/Z$.

Для нахождения указанных характеристик по теоретическим формулам в системе Matlab была написана программа. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Расчет практических и теоретических характеристик системы

Характеристики	Расчет на основании дискретной модели	Расчет на основании теоретических формул
	$\lambda = 4$, $\mu = 3$, $\kappa = 2$, $Z = 6$, $n = 10^6$,	$\lambda = 4$, $\mu = 3$, $\kappa = 2$, $Z = 6$
коэффициент использования системы	$\widetilde{\psi} = 0.991124$	$\overline{\psi} = 0.991151$
среднее время ожидания в очереди	$\widetilde{w} = 0.426391$	$\overline{w} = 0.425594$
среднее время пребывания требования в системе	$\widetilde{u} = 0.760127$	$\overline{u} = 0.758927$
среднее число требований в очереди	$\widetilde{b} = 2.532575$	$\overline{b} = 2.530970$
среднее число требований в системе	$\widetilde{n} = 4.514824$	$\overline{n} = 4.513273$

Для сравнения приведем еще одну таблицу, в которой все характеристики вычислены для числа требований $n = 10^6$ и $n = 100$. Результаты расчетов приведены в таблице 2. Здесь T – время моделирования.

Таблица 2 – Расчет практических характеристик системы

Характеристики	Расчет на основании дискретной модели	
	$\lambda = 4, \mu = 3,\ n = 10^6,$ $\kappa = 2,\ Z = 6$	$\lambda = 4,\ \mu = 3,\ n = 100,$ $\kappa = 2,\ Z = 6$
T, врем. ед.	1.6815e+05	15.836568
$\widetilde{\psi}$	0.991124	0.974925
$\widetilde{w}$	0.426391	0.376175
$\widetilde{u}$	0.760127	0.684965
$\widetilde{b}$	2.532575	2.375362
$\widetilde{n}$	4.514824	4.325214

Если сравнивать характеристики, полученные на основе дискретной модели, для $n = 100$ (таблица 2) с соответствующими характеристиками на основе теоретических формул, то видно, что они отличаются более чем на 5-7%. Это говорит о том, что при небольшом числе требований, система не успевает достичь стационарного режима, поэтому разница между соответствующими характеристиками существенна. При увеличении числа требований до $n = 10^6$ характеристики системы, полученные на основе дискретной модели, отличаются от соответствующих характеристик, полученных на основе теоретических формул, менее чем на 1% . Таким образом построенную имитационную модель системы $M/M/\kappa/\infty/Z$ можно использовать для моделирования реальных систем, меняя интенсивности входных поток, интенсивности обслуживания требований, число обслуживающих приборов и число источников.

По проведенным исследованиям можно выявить недостатки и достоинства ЗСМО.

Достоинства:

- исключительная простота реализации;

- малый расход системных ресурсов на организацию.

Недостатки:

- заявки могут находиться длительное время в системе;

- при увеличении нагрузки растет время ожидания обслуживания, при этом короткие заявки ждут столько же, сколько и длинные. То есть имеет место дискриминация процессов.

Построенную имитационную модель можно использовать для нахождения оптимальных параметров системы. Например, найдем оптимальное количество обслуживающих приборов при ограничении на время ожидания требования в очереди некоторым значением T_m.

Зададим параметры системы $\lambda = 5$, $\mu = 4$, $\kappa = 2$, $Z = 10$, $T_m = 0.3$. Будем увеличивать κ до тех пор, пока $\widetilde{w}$ станет меньше T_m. Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Расчет характеристик ЗСМО с $\lambda = 5$, $\mu = 4$, $\kappa = 2$, $Z = 10$

κ	$\widetilde{n}$	$\widetilde{b}$	$\widetilde{u}$	$\widetilde{w}$	$\widetilde{\psi}$	T
2.00	8.54	6.54	1.13	0.87	1.00	132.23
3.00	7.70	4.70	0.65	0.40	1.00	84.95
4.00	6.83	2.89	0.43	0.18	0.99	62.66

Из таблицы видно, что при $\kappa = 4$ заданное ограничение достигнуто.

Аналогично можно ввести ограничение на любой параметр системы.

В данном разделе также рассмотрена задача нахождения оптимального количества приборов в системе с учетом стоимости простоя. Пусть c_1 у.е. – потери от пребывания требования в очереди, c_2 у.е. – потери от простоя системы. Введем стоимостную функцию

$$F(\kappa) = \widetilde{w}(\kappa)c_1 + (1 - \widetilde{\psi}(\kappa))c_2.$$

Зададим параметры системы $\lambda = 5$, $\mu = 4$, $\kappa = 2$, $Z = 10$. Вычислим значение функции $F(\kappa)$ при условии, что стоимость простоя системы в 3 раза выше стоимости простоя требования ($c_1 = 5$). Результаты расчета приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Расчет характеристик ЗСМО с $\lambda = 5$, $\mu = 4$, $\kappa = 2$, $Z = 10$, $c_2 = 3c_1$

κ	$\widetilde{w}$	$\widetilde{\psi}$	$\widetilde{w}(\kappa)c_1$	$(1-\widetilde{\psi}(\kappa))c_2$	$F(\kappa)$	T
2.00	0.79	1.00	3.93	0.00	3.93	1231.17
3.00	0.39	1.00	1.97	0.02	1.99	849.81
4.00	0.18	0.99	0.92	0.19	1.12	636.94
5.00	0.08	0.95	0.38	0.78	1.16	527.44
6.00	0.03	0.87	0.13	1.98	2.11	479.66
7.00	0.01	0.78	0.04	3.34	3.38	460.48
8.00	0.00	0.69	0.01	4.70	4.70	447.38

Из таблицы видно, что при $\kappa = 4$, $F(\kappa) = 1.12$ достигает минимального значения.

Таким образом, используя имитационную модель замкнутой системы массового обслуживания, можно решать различные оптимизационные задачи.

Заключение. В данной работе были определены основные понятия, связанные с системами массового обслуживания. Изучены замкнутые системы обслуживания. В работе рассмотрены принципы и алгоритмы построения имитационных моделей систем массового обслуживания.

Построена математическая модель изученной системы массового обслуживания типа $M/M/\kappa/\infty/Z$. Разработана программа, моделирующая работу такой системы, и позволяющая вычислять основные характеристики системы на основании дискретной модели. Также разработана программа для вычисления основных характеристик по теоретическим формулам ЗСМО. Все программы написаны в системе MatLab. Были вычислены основные характеристики для ЗСМО на основе имитационной модели и по теоретическим формулам для одинаковых входных параметров. Проведен сравнительный анализ полученных характеристик. Были рассмотрены две оптимизационные задачи: задача нахождения оптимального количества обслуживающих приборов при ограничении на время пребывания требования в системе или очереди, задача нахождения оптимального количества обслуживающих приборов с учетом стоимостной функции. На основе построенной модели ЗСМО можно оценивать эффективность функционирования реальных систем обслуживания.