МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Электронный образовательный курс «Уравнения и неравенства с радикалами»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы
направление 44.04.01 – Педагогическое образование
механико-математического факультета
Бикалиевой Алии Александровны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент Разумовская Е.В.

подпись, дата

Заведующий кафедрой
и.о. зав. каф., к.ф.-м. н., доцент Разумовская Е.В.

подпись, дата

Саратов 2021

Введение. В век новых технологий довольно увеличилась степень воздействия окружающего мира на подрастающее поколение. Происходит переоценка ценностей, расслоение общества, изменение психологического стереотипа людей. Школа – это часть общества и в ней, как в капельке воды, отражается та же проблема, что и во всей России.

Соответственно меняются и задачи педагога. Теперь он должен быть не только источником информации, который дает знания, но и организатором самообразования школьников, который побуждает их к творческому поиску. Учителю надо искать индивидуальный путь, что может быть осуществлено лишь в результате совместной творческой деятельности педагога и школьника.

Умения и навыки решать иррациональные уравнения и неравенства являются очень важными, их развитие требует значительных усилий, как со стороны ученика, так и со стороны учителя.

Изучением вопросов методики преподавания темы «Иррациональные уравнения и неравенства» занимались: Ю.Ю. Гнездовский, В.Н. Горбузов, П.Б. Павлючик [1], В.В. Рождественский [2], С.А. Жестков [3], А.Х. Шахмейстер [4] и др.

Решать иррациональные уравнения и неравенства учащиеся начинают с 8 класса в курсе «Алгебра» и продолжают до 11 класса. Задания по данной теме встречаются в основном государственном экзамене, а также в едином государственном экзамене. Особое внимание требует уделить решению уравнений и неравенств методом равносильности. Пробелы в знаниях учащихся по этому вопросу порой делают бесполезной всю дальнейшую работу по теме: часто учащиеся уверенно сводят сложные иррациональные уравнения и неравенства к формальному виду, однако правильного ответа не всегда получается, так как не обладают навыком нахождения допустимых значений.

Магистерская работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Иррациональные уравнения и неравенства». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 10-11 класса основного общего образования, и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

Цель магистерской работы – разработать электронный образовательный ресурс (ЭОК) «Иррациональные уравнения и неравенства» для учеников 10-11 классов и учителей школ.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести анализ литературы по выбранной теме.

2. Разработать теоретическое и практическое содержание ЭОК «Иррациональные уравнения и неравенства».

3. Апробировать результаты исследования.

Методы исследования, используемые в работе: изучение нормативных документов; анализ учебно-методической литературы; обобщение опыта работы действующих учителей математики; разработка и апробация методических материалов.

В магистерской работе изложение теоретического материала построено в проблемной форме с обсуждением, наталкивающим к теоремам равносильности, т.е. к более удобной форме решения.

Научная новизна магистерской работы состоит в разработке дидактического материала трех уровней сложности.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников.

Целью электронного образовательного курса является применение дистанционных образовательных программ и электронного обучения с целью повышение качества обучения при реализации образовательных программ, а также развитие самостоятельной творческой и исследовательской деятельности учащихся.

Задачи создания электронного образовательного курса:

– соответствие единым требованиям к структуре, отдельным элементам ЭОК и технологиям обучения в системе дистанционного образования;

– разработка учебно-методических и контрольно-измерительных материалов по теме «Иррациональные уравнения и неравенства», реализуемой в системе дистанционного образования;

– обновления комплекса учебно-методических материалов по данной теме с целью совершенствование курса.

В целом, успешное освоение данного электронного образовательного курса окажет помощь при сдаче Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Структура электронного образовательного курса

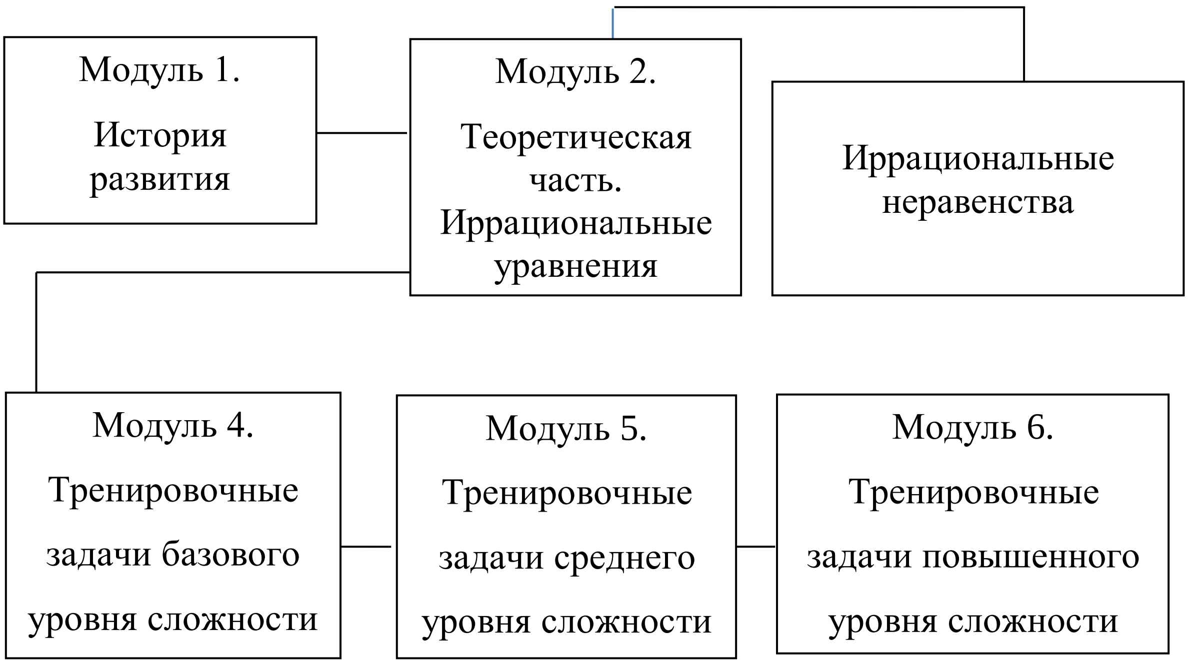

Рисунок 1

Рекомендуем следующий порядок изучения данного электронного курса. Сначала необходимо ознакомиться с модулем 1 «История развития иррациональных уравнений и неравенств в математике».

Учитывая то, что данный модуль носит ознакомительный характер, можно сразу приступить к изучению модуля 2 «Теоретическая часть. Иррациональные уравнения». Материал данного модуля частично имеется в учебниках алгебры [5,6] и [7,8].

После изучения данных разделов можно браться за решение задач базового уровня сложности – это модуль 4. Каждая задача данного уровня будет оцениваться в 1 балл. Модуль считается успешно пройденным, если учащийся набрал от 8 до 10 баллов. Такое количество баллов можно приравнять к оценке «5». Если учащийся набрал от 5 до 7 баллов, это говорит о менее успешном освоении модуля и приравнивается к оценке «4», от 2 до 4 баллов – это оценка «3». Наконец, если набрано менее 2 баллов, значит, есть необходимость снова вернуться к изучению теоретической части.

Когда задания базового уровня сложности не будут вызывать затруднений, необходимо вернуться к модулю 2, а именно к разделу «Иррациональные неравенства» для закрепления материала. После этого можно сразу приступать к модулю 5 «Тренировочные задачи среднего уровня сложности».

На освоение данного электронного образовательного курса в среднем можно затратить две недели. Но это касается учащихся 11-х классов, освоивших темы, необходимые для решения некоторых задач среднего и повышенного уровней сложности. Необходимо учитывать уровень знаний учащихся, и в каком классе предлагается прохождение данного курса.

Основное содержание работы. В первой главе «Теоретические основы изучения иррациональных уравнений и неравенств в школьном курсе математики» – описаны история развития иррациональных уравнений и неравенств в математике и методика решения иррациональных уравнений и неравенств.

Самым удобным при решении иррациональных уравнений и неравенств является метод эквивалентных преобразований.

Метод эквивалентных преобразований – это метод предполагает избавление от радикалов, но при этом ставится условие, чтобы от уравнения перейти к равносильной ему системе, состоящей из уравнений и неравенств.

В основе этого метода лежит следующее свойство числовых неравенств: если $a = b$, то $a^2 = b^2$, и если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 = b^2$, то $a = b$.

Рассмотрены следующие иррациональные уравнения и их равносильности:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{(x)} = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \leftrightarrow (\sqrt[2n+1]{f(x)})^{2n+1} = g^{2n+1}(x) \leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x).$$

Пример 1. Решите у равнение $\sqrt{5-x} = x-3$

$$\sqrt{5-x} = x-3 \leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 5-x = (x-3)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ (x-1)(x-4) = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = 4$$

Рассмотрены следующие иррациональные неравенства и их равносильности:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^{2n}(x) \end{cases} \text{ при } n \in N$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^{2n}(x) \end{cases} \end{array} \right. \text{ при } n \in N$$

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{2x-1} < x-2$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-2>0 \\ 2x-1<(x-2)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0{,}5 \\ x>2 \\ x^2-6x+5>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ (x-1)(x-5)>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>5 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow x>5.$$

Неравенства с радикалом нечетной степени:

$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \ \ \forall n \in N,$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} \leq g(x) \ \ \forall n \in N,$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \ \ \forall n \in N,$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} \geq g(x) \ \ \forall n \in N.$

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt[3]{x^3+2x^2-1} \geq x+1$

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2-1} \geq x+1 \ \leftrightarrow \ x^3+2x^2-1 \geq (x+1)^3 \ \leftrightarrow$$

$$x^3+2x^2-1 \geq x^3+3x^2+3x+1 \ \leftrightarrow \ x^2+3x+2 \leq 0 \ \leftrightarrow$$

$$(x+2)(x+1) \leq 0 \ \leftrightarrow \ -2 \leq x \leq -1$$

Во второй главе «Тренировочные задания» - разработаны тесты трех уровней сложности для ступенчатого контроля.

Пример 4. Задание из теста базового уровня сложности. Решите уравнение $\sqrt{x} = x-2$

Решение: $\sqrt{x} = x-2 \ \leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x=(x-2)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \leftrightarrow$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ (x-1)(x-4)=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow x=4$

Ответ: 4

Пример 5. Задание из теста повышенного уровня сложности. Решите неравенство $x+3<\sqrt{x^2+4x-5}$

Решение: $\sqrt{x^2+4x-5} > x+3 \ \leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3<0 \\ x^2+4x-5 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2+4x-5>(x+3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-3 \\ (x-1)(x+5) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+4x-5>x^2+6x+9 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-3 \\ x \in (-\infty;-5] \cup [1;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ 2x<-14 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-3 \\ x \in (-\infty;-5] \cup [1;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -3 \\ x<-7 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty;-5] \\ x \in \emptyset \end{array}\right. \leftrightarrow x \leq -5$$

Ответ: $x \epsilon (-\infty;-5]$.

Пример 6. Задание из теста высокого уровня сложности. Решите уравнение:

$$\frac{x^2}{\sqrt{5x+36}}+\sqrt{5x+36}=2x$$

Решение:

$$\frac{x^2}{\sqrt{5x+36}}+\sqrt{5x+36}=2x \leftrightarrow \frac{x^2+5x+36}{\sqrt{5x+36}}=2x \leftrightarrow$$

$$x^2+5x+36=2x\sqrt{5x+36} \leftrightarrow x^2+5x+36-2x\sqrt{5x+36}=0 \leftrightarrow$$

$$x^2-2x\sqrt{5x+36}+5x+36=0 \leftrightarrow \left(x-\sqrt{5x+36}\right)^2=0 \leftrightarrow$$

$$x-\sqrt{5x+36}=0 \leftrightarrow x=\sqrt{5x+36} \leftrightarrow \begin{cases} x^2=5x+36 \\ x\geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-36=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-9)(x+4)=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-4 \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \leftrightarrow x=9$$

Ответ: $x=9$.

Заключение. Электронные образовательные технологии давно признаны во всём мире и включены в системы общеобразовательных стандартов множества стран (в том числе и РФ), а развитие цифрового обучения является приоритетной задачей государственной политики в области образования.

В основу образовательного процесса при дистанционном обучении положена целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучаемого, который мог бы учиться в удобное для себя время, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем в процессе обучения.

В данной работе реализуется электронный образовательный курс по теме «Иррациональные уравнения и неравенства» для обучающихся 10-11 классов, который был апробирован в МОУ «СОШ №30 с углубленным изучением отдельных предметов им. П. М. Коваленко» Энгельсского муниципального района Саратовской области.

Был изложен теоретический материал по данной теме и проведено тестирование трех уровней сложности.

После проведения тестирования по теме «Иррациональные уравнения и неравенства» проведена соответствующая корректировка тестов базового, среднего и повышенного уровня сложности. Были получены следующие результаты.

Результат апробации тестов базового уровня сложности

№ п/п задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% выполненных заданий	87	83	87	74	69	70	65	56	56	70

Результат апробации тестов среднего уровня сложности

№ п/п задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% выполненных заданий	76	78	69	56	60	56	39	56	34	26

Результат апробации тестов повышенного уровня

№ п/п задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
% выполненных заданий	23	37	23	32	32	37	32	23	23	18

Ср. вз. = 51,5 %.

Средневзвешенное значение показывает, что 51,5 % учащихся успешно прошли тестирование. После проведение тестирования была проведена соответствующая корректировка курса для более оптимального изучения.

При апробации пришли к выводу: разработанный курс заданий по теме: «Иррациональные уравнения и неравенства», предназначенный для уроков математики, а также элективных курсов по математике, послужит хорошей основой для усвоения данной темы на более глубоком уровне.

Поэтому практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели. Теоретический материал построен в проблемной форме с обсуждением, приводящим к более удобной форме решения заданий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гнездовский, Ю.Ю. Уравнения и неравенства с радикалами: пособие / Ю.Ю. Гнездовский, В.Н. Горбузов, П.Б. Павлючик. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 246 с.
2. Рождественский, В.В. Иррациональные уравнения и неравенства: Методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / В.В. Рождественский. – М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. – 20с.
3. Жестков, С.А. Методические материалы по математике (иррациональные уравнения) Изд.: Фонд развития ИННопрактика, 2017.
4. Шахмейстер, А. Х. Иррациональные уравнения и неравенства : пособие для школьников, абитуриентов и учителей / А.Х. Шахмейстер; под общ. ред. засл. учителя РФ Б.Г. Зива. - [3-е изд., испр. и доп.]. – Санкт-Петербург. – Москва : Петроглиф Виктория плюс Изд-во МЦНМО, 2011. – 214 с.
5. Мерзляк, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: базовый уровень: учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, и др. 4-е изд. – М.: Вентана-Граф, 2019. – 368 с.
6. Мерзляк, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый уровень: учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, и др.– М.: Вентана-Граф, 2017. – 268 с.
7. Мерзляк, А. Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс: углубленный уровень: учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, и др.– М.: Вентана-Граф, 2021. – 479 с.
8. Мерзляк, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: углубленный уровень: учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, и др.– М.: Вентана-Граф, 2019. – 413 с.