

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Конструирование логических задач  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование механико-математического  
факультета

Талыбовой Севды Аслановны

Научный руководитель  
Ст. преподаватель

С.В. Лебедева

Зав. кафедрой  
к.п.н., доцент

И.К. Кондаурова

Саратов 2021

**Введение.** Логико-информационная культура, логическое мышление и логические задачи, способствующие его развитию, на протяжении последних 150 лет являются ядром педагогических, психологических, методических общих и частных проблем всех уровней общего и профессионального образования.

Проблеме использования логических задач в обучении математике школьников посвящены работы Б.А. Кордемского (1956 г.), Т. В. Косма (1971 г.), Е. В. Кузнецовой (1997 г.), М. К. Акимовой (1999 г.), Н. И. Фирстовой (1999 г.), Ж. Г. Дедовец (2001 г.), М. А. Екимовой (2002), А. Ш. Багаутдиновой (2004 г.) [8], В. П. Заесенок (2004 г.), Н. Д. Шатовой (2004 г.), И. Н. Яворской (2004 г.), Н. П. Алешиной (2008 г.), Н. Ю. Шлат (2010 г.) и других.

Проблемами логической подготовки учащихся на протяжении последних пяти лет занимаются на кафедре математики и методики ее преподавания. Последней из тех, кто обращался к этой теме – Д. А. Хатаева – ввела понятие универсальной логической задачи и описала методику работы с универсальными сюжетными логическими задачами на уроке и во внеурочное время; ею поставлена, но не решена проблема конструирования новых логических задач по тексту имеющихся. Решение этой проблемы стало задачей бакалаврской работы.

Цель бакалаврской работы – разработать методические указания по конструированию новых универсальных логических задач по тексту имеющихся.

Задачи бакалаврской работы: 1) обобщить имеющийся материал последних лет по теме исследования; 2) описать общие подходы к конструированию логических задач; 3) продемонстрировать на конкретных примерах возможности общих подходов к конструированию логических задач.

Методы исследования: анализ научно-методической литературы по проблеме, теоретический анализ и обобщение, педагогическое (методическое проектирование).

Работа состоит из введения, двух разделов основной части, заключения, списка из 25 использованных источников и приложения.

**Основное содержание работы.** В первой главе «Общие подходы к конструированию универсальных логических задач» обобщены имеющиеся материалы последних лет по теме исследования; уточнены определения некоторых классов универсальных логических задач; приведены примеры таких задач из современных контрольно-измерительных материалов (ВПР, ОГЭ и ЕГЭ), он-лайн курса логики в игровой форме logicLike и флешмоба MathCat.

Под *универсальной логической задачей* понимается задача, обладающая следующими характеристическими свойствами: 1) условие сформулировано на естественном языке, возможно с опорой на некоторую информационную модель (рисунок, таблица, схема и т.п.) или же представлено исключительно информационной моделью; 2) в условии имеется хотя бы один «непредметный» объект и/или отношение (в нашем случае нематематический объект и/или отношение), не вся информация об этом объекте содержится в условии, но может использоваться в решении; возможно наличие литературного, реального или иного занимательного контекста; 3) основное требование – выявление свойств данного объекта (атрибутивность) и/или отношений между данными объектами (реляционность); дополнительное или вспомогательное требование – нахождение количественных характеристик объекта/процесса; 4) отношение между условием и требованием потенциально содержит в себе способ решения задачи – предписание совершить определенные действия (анализа, абстрагирования, сравнения, классификации, обобщения, оперирования свойствами и др.) и указания на объект, относительно которого предлагается совершить данные действия; 5) решение опирается в первую очередь на знание и использование логических операций и законов логики, и только затем, на предметные (в нашем случае, математические теоретические и операционные) знания; 6) решение строится на рассуждениях согласно законам логики или на информационном моделировании (составление и заполнение таблиц, построение графиков, моделирование на полупрямой,

моделирование с помощью блок-схем и т.д.), построении определённой схемы операций, системы выводов и т.п.; 7) решение изначально эвристично, алгоритмичность возможна только после появления идеи решения; 8) успешность решения прямо не зависит от уровня обученности и овладения программным материалом какого-либо этапа общего/высшего образования; 9) успешность решения прямо зависит от проявления находчивости, смекалки, оригинальности мышления, умения критически оценивать данные условия и/или постановку вопроса.

В логических задачах заложен значительный образовательный потенциал; они воспитывают одно из важных качеств математического мышления – критичность, учат анализировать воспринимаемую информацию и давать разностороннюю оценку, а также усиливают интерес к решению нестандартных задач, в том числе с использование математического аппарата. Очевидно, что грамотная работа над логической задачей занимает немало времени и требует, соответственно степени сложности задачи, адекватного выбора форм, методов, приемов средств и обучения. Поэтому, универсальные логические задачи целесообразно объединить в две группы – группу задач пригодных для включения в структуру и содержания уроков и связанных с ними домашних работ и группу задач для внеурочной деятельности, в том числе проектной.

К группе задач, пригодных для включения в структуру и содержание уроков, можно отнести задачи на информационных моделях и текстовые задачи, которые непосредственно связаны с определёнными темами школьного курса математики: «задачи на уравнивание», «комбинаторные с алгебраическим условием», «на промежутки», «на возраст и время», числовые ребусы, «геометрические задачи», «задачи на делимость», «на действия с множествами», «на 3D мышление» и классические логические задачи на математическом материале. Например, *комбинаторная задача с алгебраическим условием* (помимо данных, определяющих некоторое комбинаторное соединение имеется данное, позволяющее записать некоторое алгебраическое выражение): «Вася задумал двузначное число и сказал про него:

«Если первая цифра моего числа чётна, то вторая – нечётна». И, как обычно, при этом соврал. Сколько есть вариантов чисел, которые он мог загадать» ((MathCat-2020, жёлтая лига, <https://mathcat.info/userfiles/mathcat-2020-3.pdf>).

Решение. Логическое условие: высказывание «Если первая цифра моего числа чётна, то вторая – нечётна» – ложно. Отсюда следует: если первая цифра числа чётна, то и вторая – чётна».

Алгебраическое условие: «первая цифра числа чётна» может быть записано  $p_1 = 2n$ , где  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Алгебраическое условие: «вторая цифра числа чётна» может быть записано  $p_1 = 2n$ , где  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

По комбинаторному правилу произведения существует  $4 \cdot 5 = 20$  двузначных чисел, в которых обе цифры чётные.

Ответ. Есть 20 вариантов чисел, которые мог загадать Вася.

Для домашней работы кроме этих задач подходят сюжетные логические задачи, задачи «на составление алгоритма», «Наведи порядок!», «задачи на действия с множествами», «на угадывание чисел» а также «математические игры со словами». Например, *сюжетная логическая задача* (классическая логическая задача на нематематическом материале): «Катя младше Тани, но старше Даши. Ксюша не младше Даши. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях: 1) Таня и Даша одного возраста. 2) Среди названных четырёх девочек нет никого младше Даши. 3) Таня старше Даши. 4) Таня и Катя одного возраста» (ВПР-2021, 7 класс).

Решение. Можно для визуализации использовать информационную модель – граф-схему, на которой, чем правее отмечена точка, изображающая девочку, тем она старше, – рисунок 1. Однозначно установленные связи (союз «и») будем обозначать сплошной линией, а неоднозначные (союз «или») – пунктирной. Горизонтальная линия обозначает последовательность возрастов (младше – старше), вертикальная – равенство возрастов, наклонная устанавливает взаимосвязь только между возрастами двух девочек (она соединяет точки, соответствующие их именам).

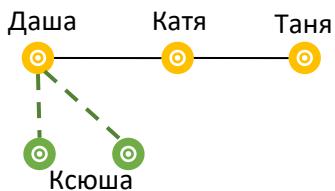


Рисунок - 1.

Теперь читаем граф-схему и выбираем верные утверждения (ответ):

– Среди названных четырёх девочек нет никого младше Даши.

– Таня старше Даши.

Для проектной и внеурочной учебно-исследовательской деятельности современных школьников, можно отнести логические задачи на информационных моделях, задачи «на эрудицию (знание историко-математических фактов)», разработку компьютерных моделей решения задач, а также составление реляционных (генеалогических) задач, геометрических и т.п. других задач выделенных нами классов.

Для внеурочной работы с учащимися по решению задач (математических, логических, решаемых средствами математики) – математический кружок – пригодны задачи олимпиадной тематики: «классические логические», «Наведи порядок!», «комбинаторные с алгебраическим условием», «на минимальное количество/принцип Дирихле», «на промежутки с предварительным упорядочением» и «задачи о рыцарях и лжецах». Для эпизодических форм – досуговые математические мероприятия, конкурсы и соревнования – пригодны все выделенные нами классы логических задач (что следует из определения универсальной логической задачи).

Проведена классификация универсальных логических задач в зависимости от основного вида деятельности решающего, и выделены два класса задач: *подготовительные* – универсальные логические задачи, объединяемые в обучающие серии для отработки умения решать задачи определенного типа; *конкурсные* – универсальные логические задачи (включаются в содержание математических конкурсов, Всероссийских проверочных работ, экзаменационных работ (ОГЭ, ГВЭ и ЕГЭ)), предлагаемые для демонстрации умения их решения.

Конкурсных логических задач вполне достаточно для того, чтобы составить у школьников представление об их разнообразии. Подготовительных

задач явно недостаточно. Конкурсные текстовые логические задачи, взятые из различных источников (банки задач ВПР, ОГЭ, ГВЭ и ЕГЭ, прецедентные классификаторы математических игр-конкурсы без возрастных ограничений – флэшмоб «MathCat» и МатСтарт «Кенгуру для всех-всех-всех», сборники логических головоломок и т.п.), могут послужить основой для конструирования новых универсальных логических задач по тексту имеющихся.

Выделены пять основных подходов к конструированию логических задач по тексту имеющихся: 1) изменение контекста без изменения структуры задачи, при котором не меняется суть (алгоритм) решения; 2) расширение требования без изменения данных условия; 3) изменение данных условия без изменения структуры данных и требования; 4) изменение данных условия с изменением структуры некоторых или всех данных, но без изменения требования; 5) изменение каким-либо образом данных условия и требования.

Основные приемы, которые используются при конструировании логических задач по тексту имеющихся: «обобщение условия или требования задачи; конкретизация условия или требования задачи; специализация условия или требования задачи; составление задач, обратных исходной; составление задач, аналогичных исходной; составление задач, являющихся частными случаями исходной; замена или добавление требования с сохранением условия; замена или добавление условия с сохранением требования; использование результатов решения предыдущей задачи в условии или решении последующей».

Задачные конструкции, получаемые в результате: вариации (простые, расширенные и сложные), серии и цепочки задач.

Во второй главе «Алгоритмические предписания к конструированию некоторых типов универсальных логических задач» рассмотрены примеры конструирования вариаций логических задач и обращения логических задач.

*Простая вариация задачи, основанная на вариативности условия без изменения структуры данных условия и без изменения требования, строится по следующему плану-1: 1) решается исходная задача, 2) формализуется условие*

задачи, 3) составляется простая вариация условия задачи (множество задач, полученных из данной путём перестановки числовых величин и/или элементов множества объектов, данных в задаче), 4) из простой вариации выбираются тренировочные задачи (имеют единственное решение) и исследовательские задачи (для анализа данных – могут иметь несколько решений или не иметь решения).

*Простая вариация задачи, основанная на вариативности требования без изменения условия, строится по следующему плану-2: 1) решается исходная задача, 2) формулируются общие выводы по решению задачи, 3) на основании общих выводов составляется простая вариация требования.*

*Простая вариация задачи, основанная на вариативности условия и требования без изменения их структуры, строится последовательным осуществлением плана-1 и плана-2.*

Под *обращением задачи* понимается последовательное её изменение путём извлечения из условия части или даже всех данных и включения их в требование; при этом из него, соответственно, исключаются несколько или все найденные искомые и переводятся в условие. Под *обращённой задачей* понимается задача, в которой по сравнению с исходной задачей, при сохранении структуры, искомое или несколько искомых входят в состав её условия, а один или несколько элементов условия становятся искомыми. Задачу, в которой все условия прямой задачи стали её требованием и наоборот, всё требование стало её условием, называют *обратной* по отношению к исходной задаче. Всю совокупность обращённых задач, полученных путём обращения из исходной задачи, называют *окрестностью обращённых задач*.

Процесс обращения задачи разбивают на пять основных этапов: 1) *анализ содержания прямой задачи* – определяется, сколько и какие объекты, процессы, ситуации рассматриваются в задаче; выделяются данные условия и неизвестные данные, которые необходимо найти для выполнения требования; устанавливаются функциональные зависимости и связи, существующие между выделенными величинами; 2) *решение прямой задачи и проверка результата*;

3) *подготовка к обращению задачи* – записывается числовая или логическая цепочка структурных элементов решённой прямой задачи; определяется потенциал обращения задачи (количество обращений задачи); 4) *осуществление обращения задачи* – составляются все числовые и/или логические цепочки структурных элементов обращённых задач; по каждой такой цепочке формулируется условие обращённой задачи; 5) *исследование обращённой задачи* – оценивается корректность (полнота, непротиворечивость) каждой сформулированной обращённой задачи, составляется и при необходимости реализуется план её решения его; осуществляется сопоставительный анализ прямой и обращённой задач.

Приведём пример: «Отцу столько же лет, сколько двум его сыновьям вместе. Младший сын вдвое младше старшего и на 40 лет моложе отца. Сколько лет младшему сыну?» (LogicLike).

*1 Анализ содержания прямой задачи.* В задаче три «героя» – отец и два сына (младший и старший). Известно, что: возраст Отца равен сумме возрастов двух сыновей; младший сын вдвое младше старшего; младший сын на 40 лет моложе отца. Необходимо найти, сколько лет младшему сыну.

Чтобы понять, сколько и какие обращённые задачи можно сконструировать на основе данной, запишем условие в табличной форме, в которой укажем все известные и неизвестные величины – таблица 1.

Таблица 1 – Информационная модель задачи 2.

Член семьи	Возраст	Отношение 1	Отношение 2	Отношение 3
Отец	?			
Старший сын	?			
Младший сын	?			

Итак, у нас 4  
вопроса и 2  
числовых данных,

значит, как минимум  $4 \cdot 2 = 8$  обращённых задач можно составить.

*2-3 Решение прямой задачи, проверка результата и подготовка к обращению задачи.* Для обращения решение задачи желательно вести на той же табличной модели, а если не получится, то результаты (промежуточный и *основной*) занести в ту же таблицу – таблица 2. Таким образом, задача вполне готова для обращения.

Таблица 2 – Ответ (промежуточный и основной результаты) задачи 2.

Член семьи	Возраст	Отношение 1	Отношение 2	Отношение 3
Отец	60			
Старший сын	40			
Младший сын	20			

4 Осуществление обращения задачи. Обращение по промежуточному результату даёт три задачи, требования которых соответствует трём промежуточным результатам (отмечены знаком вопроса в таблице 1).

Задача 1<sup>0</sup>. Отцу столько же лет, сколько двум его сыновьям вместе. младший сын вдвое младше старшего; младший сын на 40 лет моложе отца. Сколько лет отцу?

Задача 2<sup>0</sup>. Отцу столько же лет, сколько двум его сыновьям вместе; младший сын вдвое младше старшего; младший сын на 40 лет моложе отца. Сколько лет старшему сыну?

Задача 3<sup>0</sup>. Отцу столько же лет, сколько двум его сыновьям вместе; младший сын вдвое младше старшего; младший сын на 40 лет моложе отца. Сколько лет в сумме составляет возраст сыновей?

Обращение, преобразованием 1-го требования в известное данное, даёт четыре задачи 4<sup>0</sup> -7<sup>0</sup> – таблица 3.

Таблица 3 – Подготовка к обращению задачи 2 преобразованием первого требования в данное.

Член семьи	Возраст	Отношение 1	Отношение 2	Отношение 3
Отец	$2.4^0$ 60			
Старший сын	$2.5^0$ 40			
Младший сын	$2.6^0$ 20			

Задача 4<sup>0</sup>. Отцу 60 лет; младший сын на 40 лет его моложе. Во сколько раз младший сын младше старшего, если в сумме возраст братьев совпадает с числом лет их отца?

Задача 5<sup>0</sup>. Отцу столько же лет, сколько двум его сыновьям вместе; старшему сыну 40 лет, а младший сын на 40 лет моложе отца. Во сколько раз младший сын младше старшего?

Задача 6<sup>0</sup>. Отцу столько же лет, сколько двум его сыновьям вместе; младшему сыну 20 лет. Во сколько раз младший сын младше старшего, если младший сын на 40 лет моложе отца?

Задача 7<sup>0</sup>. Отцу столько же лет, сколько двум его сыновьям вместе; младший сын на 40 лет моложе отца. Во сколько раз младший сын младше старшего, если вместе братьям 60 лет?

Обращение, преобразованием 2-го требования в известное данное, проводится аналогично предыдущему и даёт ещё четыре задачи 8<sup>0</sup> -11<sup>0</sup> – таблица 4.

Таблица 4 – Подготовка к обращению задачи 2 преобразованием второго требования в данное.

Член семьи	Возраст		Отношение 1	Отношение 2	Отношение 3
Отец	2.8 <sup>0</sup>	60			
Старший сын	2.9 <sup>0</sup>	40			
Младший сын	2.10 <sup>0</sup>	20			

5 этап – исследование обращённой задачи. В нашем случае исследование обращённых задач на корректность (наличие решения) лучше проводить на алгебраических моделях. Покажем для первых семи задач.

Задачи 1<sup>0</sup> -3<sup>0</sup> имеют одну и ту же разрешающую модель – систему трёх

линейных уравнений с тремя неизвестными  $\begin{cases} x = y + z \\ 2z = y \\ x - z = 40 \end{cases}$ , поэтому разрешимы.

Задача 4 <sup>0</sup>	$60 - 40 = 20$ (лет младшему сыну), значит старшему – 40 лет, и возраст старшего относится к возрасту младшего, как $40 : 20 = 2 : 1$	
Задача 5 <sup>0</sup>	$\begin{cases} x = 40 + z \\ x - z = 40 \\ \frac{40}{z} = ? \\ x, y, z \in N; x > 40 > z \end{cases} \Rightarrow \frac{40}{x - 40} = ?$	Задача не имеет единственного решения, относится к исследовательским задачам реальной математики
Задача 6 <sup>0</sup>	$20 + 40 = 60$ (лет отцу), значит старшему сыну 40 лет, и младший сын младше старшего в $40 : 20 = 2$ раза	
Задача 7 <sup>0</sup>	Братьям вместе столько же, сколько отцу, то есть отцу 60 лет, младшему сыну $60 - 40 = 20$ лет, старшему – 40 лет, и младший сын младше старшего в $40 : 20 = 2$ раза	

Ценность решения прямых и обратных задач состоит в том, что обучаемые лучше понимают структуру математической задачи, глубже

осознают те взаимосвязи и отношения, которые свойственны задачной ситуации, лучше понимают её логическую структуру и предметное содержание, при этом при развивается мышление (за счёт переключения с прямого хода мысли на обратный) и творческий потенциал (поскольку любую сконструированную обратную задачу можно считать продуктом творчества учащихся).

**Заключение.** В процессе исследования в соответствии с целью и задачами получены следующие основные результаты: обобщены имеющиеся материалы последних лет по теме исследования; уточнены определения некоторых классов универсальных логических задач; приведены примеры таких задач из современных контрольно-измерительных материалов, он-лайн курса логики в игровой форме logicLike и флешмоба MathCat; описаны общие подходы к конструированию логических задач; перечислены основные общие приемы, которые используются при конструировании логических задач по тексту имеющихся, и некоторые специфические приёмы (приём введения отрицания, прием «замены на противоположное»); указаны задачные конструкции, получаемые в результате конструирования; продемонстрированы на конкретных примерах возможности общих подходов к конструированию логических задач; разработаны алгоритмические предписания к конструированию некоторых типов универсальных логических задач, используемых в школьной практике в качестве критериальных задач.

Работа по формулировке методических рекомендаций по конструированию логических задач для различных образовательных целей находится в самом начале и может быть продолжена, как в направлении поиска новых способов конструирования, так и в направлении конструирования универсальных логических задач различных типов.