МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

# ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 451 группы
направления 38.03.05 — Бизнес-информатика

механико-математического факультета
Волжаниной Анастасии Викторовны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент ______________ В. В. Новиков

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, д. ф.-м. н.,
профессор ______________ С. И. Дудов

Саратов 2021

**Введение.** В последнее время значительный интерес экономистов и математиков привлекает к себе применение аппарата вейвлетов для анализа экономических временных рядов из-за его способности хорошо работать с функциями, характеристики которых эволюционируют во времени.

Вейвлеты широко применяются для исследования нестационарных сигналов и временных рядов, для распознавания образов, а также при решении различных задач в радиотехнике, ядерной физике, биологии, экономике и многих других областях науки и техники. Вместе с тем следует отметить, что при исследовании экономических временных рядов техника применения вейвлетов разработана значительно менее подробно, нежели традиционный статистический инструментарий. С этим, в частности, связан тот факт, что количество работ, посвященных вейвлет-анализу экономических рядов динамики, существенно меньше числа исследований, в которых используются статистические методы. Указанные обстоятельства объясняют актуальность настоящей выпускной квалификационной работы, посвященной вейвлет-анализу финансовых временных рядов

Целью настоящей работы является обзор теоретических сведений и проведение численного эксперимента по сглаживанию временного ряда с помощью вейвлетов и сравнение качества аппроксимации с результатами сглаживания на основе непараметрической ядерной регрессии.

Объект исследования — аппроксимация временных рядов с помощью вейвлет преобразований.

Предмет исследования — индикаторы технического анализа, построенные на данных об акциях компании ПАО «Сбербанк» за период с 1 января 2020 года по 1 января 2021 года.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. изучить теоретические основы статистического и вейвлет-анализа временных рядов;
2. ознакомиться с возможностями языка R для вейвлет-анализа временных рядов;
3. осуществить численный эксперимент в среде R по анализу динамики фондовых рынков на основе вейвлет-анализа и непараметрической регрессионной процедуры.

Выпускная квалификационная работа состоит из 5 основных разделов:

1. Введение.
2. Классические методы анализа временных рядов.
3. Анализ временных рядов с использованием вейвлет-преобразований.
4. Вейвлет-анализ рядов значений технических индикаторов.
5. Заключение.

В результате анализ полученных результатов показал сопоставимое качество аппроксимации на основе обоих подходов для всех трёх индикаторов. Отсюда можно сделать вывод о предпочтительности вейвлет-аппроксимации с учётом большей информативности вейвлет-разложений по сравнению с преобразованием Фурье и его дискретными аналогами.

Во **введении** формулируется цель работы и решаемые задачи.

**Первый раздел** посвящён основам классической теории временных рядов.

Временной ряд — это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов времени. Каждый уровень временного ряда формируется под воздействием многих факторов, которые принято делить на три группы:

1. факторы, формирующие тенденцию ряда;
2. факторы, формирующие циклические колебания ряда;
3. случайные факторы.

Большинство временных рядов экономических показателей имеют тенденцию. Она характеризует совокупное долговременное воздействие множества факторов на динамику изучаемого показателя. Факторы, взятые в отдельности, могут оказывать разнонаправленное воздействие на исследуемый показатель. Но в совокупности они формируют возрастающую или убывающую тенденцию.

Так же, на изучаемый показатель может иметь влияние циклические колебания. Эти колебания могут носить сезонный характер т.к экономическая деятельность некоторых отраслей экономики зависит от времени года. При наличии данных за длительные промежутки времени представляется возможным выявить циклические колебания, связанные с общей динамикой конъюнктуры рынка, а так же с фазой бизнес цикла, в которой находится экономика страны.

Но также существуют временные ряды, которые не содержат в себе тенденции и циклической компоненты, а каждый следующий уровень образуется как сумма среднего уровня ряда и некоторой (положительной или отрицательной) случайной компоненты.

В реальности, данные не подходят только под одну единственную модель из описанных выше. Зачастую, они содержат сразу три компоненты.

Для аппроксимации таких временных рядов используют модель Койка, полиномиальную лаговую модель Алмона с конечным числом временных задержек и т.д.

Но в последннее время начинают играть большую роль вейвлеты.

**Второй раздел** посвящён основам вейвлет-анализа.

Впервые принцип вейвлет-анализа был рассмотрен в работе Гроссмана и Морле в 1984 году. Впоследствии теория и практическая часть дополнялись в различных книгах и статьях: И.Добечи в 1992, Койфман в 1992, Фостер в 1996, Скаргл в 1997. С тех пор вейвлет-анализ стал одним из популярных разделов математики.

Вейвлет преобразования нашли широкое применение для исследования временных рядов (как альтернатива преобразованиям Фурье), в задачах фильтрации и чистки многомерных сигналов, в анализе изображений, в сжатии больших массивов информации и т.д..

Основная идея вейвлет-преобразования отвечает специфике многих временных рядов, демонстрирующих эволюцию во времени своих основных характеристик – среднего значения, дисперсии, периодов, амплитуд и фаз гармонических компонентов.

Интегральным вейвлет-преобразованием функции
$f(t) \in L^2(R)$ называют выражение:

$$W(a,b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^* \left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \tag{1}$$

где $a, b \in R, a \neq 0$.

Масштаб вейвлета — параметр  определяющий размер вейвлета. Сдвиг вейвлета — параметр b задающий временную локализацию вейвлета.

Входящая в выражение (1) функция $\psi(t)$ называется вейвлетом (анализирующим, базисным или материнским вейвлетом). Стоит отметить , что в формуле (1) символом * обозначена процедура комплексного сопряжения.

Первое свойство вейвлетов это частотно-временная локализация. Это свойство означает, что вейвлеты $\psi_{(t)}$ и их преобразования Фурье $\hat{\psi}_{(w)}$ существенно отличаются от нуля лишь на малых интервалах времени и частоты и очень мало отличаются от нуля (или просто равны нулю) вне этих интервалов.

Количественной мерой локализации функции $z(t) \in L^2(R)$ могут служить ее центр $\langle t \rangle$ и радиус $\Delta_t$:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{\|z\|^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t|z(t)|^2 dt, \tag{2}$$

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{\|z\|^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [t - \langle t \rangle]^2 |z(t)|^2 dt. \tag{3}$$

При этом эффективная ширина вейвлета принимается равной $2\Delta_t$

Второе свойство вейвлетов это выполнение условия для нулевого момента. Это обеспечивается условием

$$\hat{\psi}_{(0)} = 0, \tag{4}$$

откуда следует

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \tag{5}$$

Так же бывает важно, чтобы не только нулевой момент, но и $m$ старших моментов были равны нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t) t^m dt = 0. \tag{6}$$

Вейвлеты, обладающие таким свойством, оказываются полезными при анализе временных рядов.

**Третий раздел** посвящён практической аппроксимации результатов технических индикаторов с помощью ортогональных вейвлет-разложений и непараметрической регрессионной процедуры в среде программирования R.

В качестве языка программирования был выбран язык R. Он широко используется как статистическое программное обеспечение для анализа данных и фактически стал стандартом для статистических программ.

В работе были применены такие пакеты как TTR и WaveletComp.

TTR – большая библиотека содержащая в себе около 40 технических индикаторов.

WaveletComp – библиотека для вейвлет анализа. Данная библиотека построена на основе вейвлета Морле. Вейвлет Морле – это плоская волна, модулированная гауссианой. Материнский вейвлет в данном пакете имеет следующий вид:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{iwt} e^{-t^2/2}. \tag{7}$$

Вейвлет преобразование временного ряда представляет собой сверстку ряда с помощью «дочерних вейвлетов», сгенерированных материнским вейвлетом путём трансформации во времени на $\tau$ и масштабе s:

$$Wave(\tau, s) = \sum_t x_t \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{t-\tau}{s} \right). \tag{8}$$

В качестве временного ряда здесь выступают акции компании ПАО «Сбербанк» за период с 1 января 2020 года по 1 января 2021 года. Таймфрейм равен 1 дню.

В качестве аппроксимируемых индикаторов были выбраны следующие индикаторы:

1. SMA (простое скользящее среднее) — индикатор численно равное среднему арифметическому значений исходной функции за установленный период.
2. CCI (индекс товарного канала) — индикатор, основанный на анализе текущего изменения отклонения цены от её среднего значения за определённый период и среднестатистического абсолютного значения этого параметра

3. OBV (индикатор балансового объёма) — индикатор показывает пропорции между капиталом, поступающим на рынок и уходящим с него. Результаты аппроксимации в графическом виде:

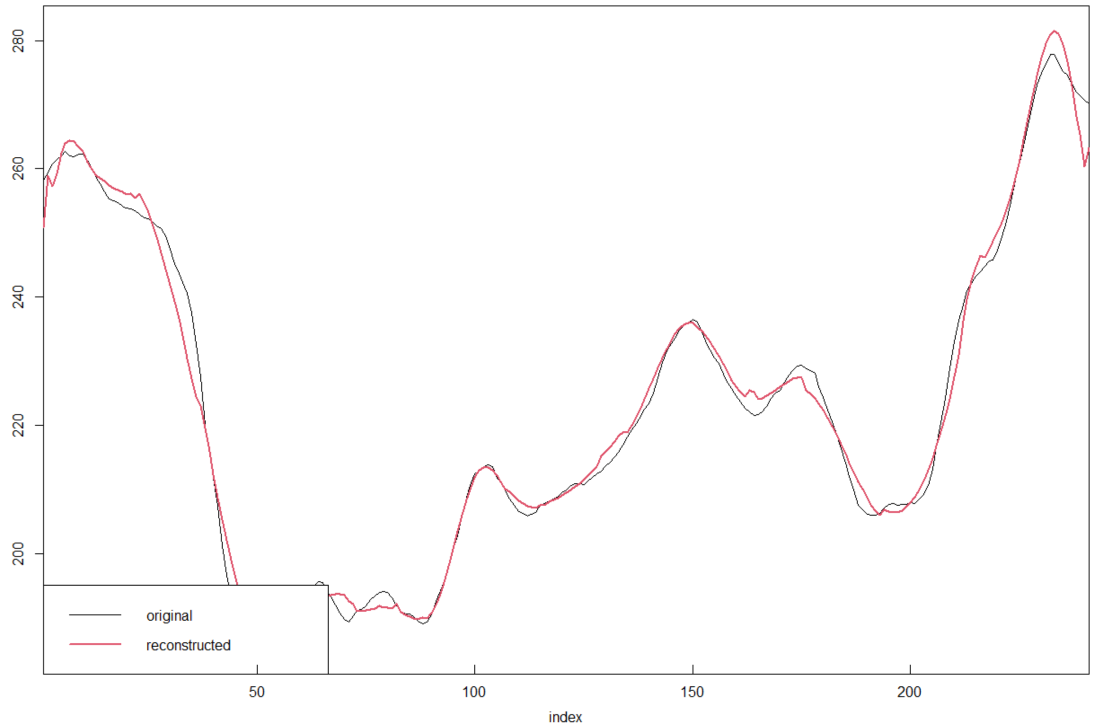


Рисунок 1 – Аппроксимация индикатора SMA с помощью вейвлетов

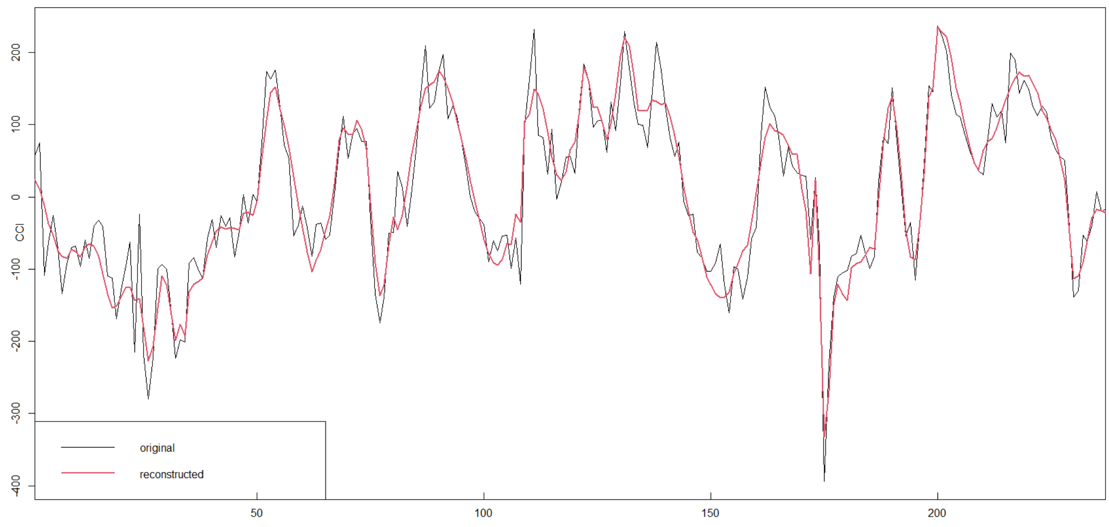


Рисунок 2 – Аппроксимация индикатора CCI с помощью вейвлетов

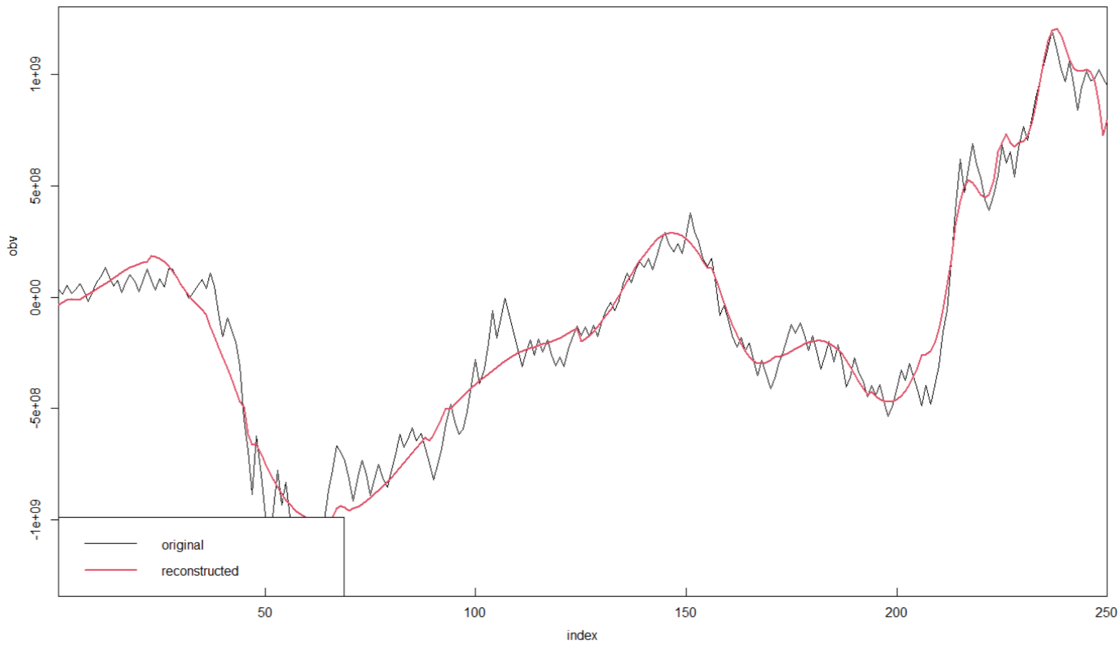


Рисунок 3 – Аппроксимация индикатора OBV с помощью вейвлетов

Для оценки результатов аппроксимации вейвлетами воспользуемся оценкой средней ошибкой аппроксимации (MAPE) и средней абсолютной ошибки (RMSE).

В следующих таблицах представленные результаты проверки:

| Индикаторы: | MAPE: |
|---|---|
| Индикатор SMA | 0.00017272 |
| Индикатор CCI | 0.00197434 |
| Индикатор OBV | 0.03834239 |

Таблица 1 – Средняя ошибка аппроксимации вейвлетами

| Индикаторы: | RMSE: |
|---|---|
| Индикатор SMA | 19.15123 |
| Индикатор CCI | 34.41887 |
| Индикатор OBV | 92.47052 |

Таблица 2 – Средняя абсолютная аппроксимации вейвлетами

Как видно из полученных таблиц, индикаторы SMA и CCI имеют наименьшее отклонение. Аппроксимированный график похож на изначальный.

Индикатор OBV показал наихудший результат при заданных параметрах. MAPE и RMSE показывают значительное отклонение при аппроксимации.

Теперь сравним полученную аппроксимацию вейвлетами с аппроксимацией тригонометрическими рациональными дробями, построенными по методу непараметрической ядерной регрессии.

$$\hat{m}_{n,N}(x) = \sum_{i=1}^{n} K_N(x; X_i) Y_i / \sum_{j=1}^{n} K_N(x; X_j), \tag{9}$$

где $n$ — число отсчетов, а в качестве функции–ядра $K_N$ используется ядро Дирихле порядка $N$.

В ходе численного эксперимента выполнялась аппрксимация рациональными дробями с ядром различного порядка $N$ от 10 до 100 с шагом 10 при постоянном числе отсчётов $n = 241$. При этом с ростом порядка $N$ до 70 наблюдалось снижение значения ошибки, после чего она стала возрастать. Таким образом, значение $N = 70$ было признано оптимальным.

Ниже представлены результаты подсчёта MAPE и RMSE для аппроксимации рациональными дробями при некоторых $N$.

| Индикаторы: | MAPE(N=70) |
|---|---|
| Индикатор SMA | 0.00025672 |
| Индикатор CCI | 0.00039632 |
| Индикатор OBV | 0.00038113 |

Таблица 3 – Средняя квадратическая ошибка аппроксимации рациональными дробями

| Индикаторы: | RMSE(N=70) |
|---|---|
| Индикатор SMA | 29.74248 |
| Индикатор CCI | 35.26267 |
| Индикатор OBV | 25.90262 |

Таблица 4 – Средняя абсолютная ошибка аппроксимации рациональными дробями

Как видно из таблиц все три индикатора имеют небольшое отклонение MAPE и RMSE.

В результате численного эксперимента мы видим, что аппроксимация индикаторов технического анализа с помощью вейвлет-преобразований довольно хорошая.

В сравнении с рациональными дробями она показала себя немного лучше у индикаторов SMA и CCI. Но значения очень близки. Индикатор OBV показал наилучший результат при аппроксимации рациональными дробями.

**Заключение.** Целью данной выпускной квалификационной работы было проведение численного эксперимента по применению методов вейвлет-анализа для аппроксимации экономических временных рядов. В теоретической части работы были рассмотрены математические основы теории временных рядов и вейвлет-анализа. В практической части рассматривалась программная реализация методов вейвлет-анализа в среде программирования R и был разработан программный продукт, способный производить аппроксимацию временного ряда на основе вейвлетов и непараметрической ядерной регрессии.

Данный программный продукт был протестирован на данные об акциях компании ПАО «Сбербанк», при этом были использованы значения трёх технических индикаторов. В результате работы было выяснено, что с помощью вейвлетов можно получить приемлемую точность аппроксимации временных рядов технических индикаторов. Результат сглаживания получается визуально похожим на исходный график индикатора, при этом средняя ошибка аппроксимации MAPE мала, значение RMSE также не слишком велико.

В ходе численного эксперимента было проведёно сравнение вейвлет-аппроксимации с аппроксимацией на основе непараметрического регрессионного подхода. Сравнение средней ошибки аппроксимации и RMSE двух методов показали, что качество сглаживания у этих методов сопоставимо. Отсюда можно сделать вывод, что применение вейвлетов для аппроксимации и прогнозирования экономических временных рядов может иметь преимущества перед классическими методами, поскольку вейвлет-анализ даёт больше информации о сигнале за счёт хорошей локализации как в частотной, так и во временной области.