МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Конгруэнции турниров

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Шабарковой Александры Олеговны

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент ____________ М. Б. Абросимов

23.01.2021 г.

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., доцент ____________ М. Б. Абросимов

23.01.2021 г.

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Из всех математических объектов графы занимают одно из первых мест в качестве формальных моделей реальных систем. Они нашли применение во многих отраслях научных знаний: физике, биологии, химии, истории, лингвистике, социальных науках, технике и т.п. Наибольшей популярностью графовые модели пользуются при изучении коммуникационных сетей, химических и генетических структур, электрических цепей и других систем сетевой структуры.

Одним из важнейших видов графов являются турниры, поскольку они находят практическое применение во многих сферах нашей жизни. Так, приложения турниров включают исследования в области голосования и коллективного выбора, что относится к сфере вопросов микроэкономики. Как и многие алгебраические объекты, турниры состоят из более мелких элементов. Всё многообразие их видов позволяет описать такая структура, как конгруэнция. Их изучение представляет наибольшую актуальность, поскольку знание схемы построения конкретных типов турниров, обладающих определёнными свойствами, такими как, например, величина диаметра и простота, значительно упрощает использование турниров на практике, так как можно будет с нуля построить необходимый граф, а не проверять все известные, пока не будет найден нужный. Учитывая кратно увеличивающееся количество турниров при росте размерности, существование схемы построения будет давать значительное ускорение при выборе турнира с заданными свойствами.

В данной работе будет проведена проверка на простоту всех турниров с количеством вершин $n \leq 11$, подсчитано количество турниров различного диаметра для $n \leq 11$, вычислено количество турниров, имеющих разное число 2-, 3- и 4-вершинных конгруэнций для $n \leq 11$, проведён вычислительный эксперимент по подсчёту количества турниров в зависимости от максимального размера конгруэнции для $n \leq 11$, а также описаны некоторые из типов простых и непростых турниров.

Целью данной работы является исследование такого свойства турниров как простота, её связи с диаметром, а также изучение конгруэнций фиксированного размера.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

1. разработать комплекс программ, позволяющий выполнять проверку турниров на простоту, вычислять их диаметр, а также вычислять количество турниров фиксированной размерности;
2. проанализировать полученные данные и на их основе сформулировать теоретические утверждения;
3. доказать сформулированные утверждения.

Дипломная работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и 7 приложений. Общий объем работы – 42 страницы, из них 28 страниц – основное содержание, включая 16 рисунков и 7 таблиц, список использованных источников из 10 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первом разделе приводятся теоретические понятия, необходимые для дальнейшего рассмотрения темы. Здесь излагаются основные определения и обозначения, относящиеся к теории графов, а также примеры, наглядно демонстрирующие предмет изучения.

Классом эквивалентности ε на множестве S, соответствующим элементу, называется множество $\varepsilon(x) = \{y \in S: x \sim y\}$.

$\{a_i |\ i \in I\}$ – это совокупность объектов, индексированных элементами множества I.

Турниром называется полный направленный граф, то есть такой направленный граф, в котором добавление любой новой дуги приводит к появлению контура длины 2. Пример турнира изображён на рисунке 1.

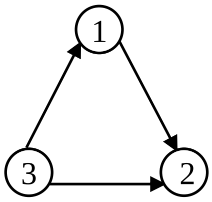

Рисунок 1 – Граф, являющийся турниром

Пусть ε – некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа $\vec{G}$. Факторграфом орграфа $\vec{G}$ по эквивалентности ε называется орграф $\vec{G}/\varepsilon = (V/\varepsilon,\ \alpha_\varepsilon)$, где V/ε – множество классов эквивалентности ε; $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)): \exists\, u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2)\ (u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Конгруэнция турнира $\vec{T}$ = (V, α) – это такая эквивалентность на множестве его вершин, что факторграф по ней является турниром. То есть конгруэнция турнира $\vec{T}$ = (V, α) – это такая эквивалентность $\Theta \subseteq V \times V$, что никакие два различных Θ-класса не имеют встречных дуг[1]. Например, одной из конгруэнций турнира, изображённого на рисунке 1, будет конгруэнция, соответствующая разбиению {1,3}, {2}.

[1]Богомолов, А.М., Салий, В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. – М., 1997. – 368 с.

Любой турнир имеет конгруэнции Δ и $V \times V$ – тождественную и универсальную.

$Con\ \vec{T}$ – это совокупность всех конгруэнций турнира $\vec{T}$. Так, для турнира, изображённого на рисунке 1, $Con\ \vec{T}$ будет содержать конгруэнции, соответствующие следующим разбиениям: $\{1\}, \{2\}, \{3\}; \{1, 3\}, \{2\}; \{1, 2\}, \{3\}; \{1, 2, 3\}$. $Con\ \vec{T}$ образует решётку.

Турнир $\vec{T} = (V, \alpha)$ называется простым, если решётка $Con\ \vec{T}$ двухэлементна, то есть если $\vec{T}$ не содержит собственных нетождественных конгруэнций. Пример простого турнира приведён на рисунке 2.

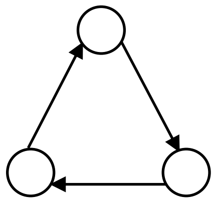

Рисунок 2 – Турнир, являющийся простым

Диаметр графа – это наибольший из эксцентриситетов всех его вершин.

Во втором разделе приводится краткий обзор научной литературы о турнирах и результатов, полученных другими исследователями. Так, строению турниров посвящено много работ, см. например[10]. Простым турнирам посвящена работа[7]. Об эксцентриситетах турниров говорится в исследовании[8]. Известно, что у каждого турнира имеется вершинное 1-расширение до простого турнира[4]. Также показано, что большинство турниров обладает диаметром 3[10].

[4]Мун, Дж. В. Вложение турниров в простые турниры // Теория графов. Покрытия. Укладки [Электронный ресурс] : Сборник переводов. – URL: https://b-ok.cc/dl/439976/decf22 (дата обращения: 25.09.2020). – Загл. с экрана.

[8]Harminc, M., Ivanro, J. Note on Eccentricities in Tournaments // Graphs and Combinatorics. – 1994. – Vol. 10. – P. 231–234.

[7]Erdös, P., Fried, E., Hajnal, A., Milner, E. C. Some remarks on simple tournaments // The Erdos Project [Электронный ресурс] : Collected Papers of Paul Erdös. – URL: http://combinatorica.hu/ ~p_erdos/1972-24.pdf (дата обращения: 05.09.2020). – Загл. с экрана.

[10]Moon, J. W. Topics on tournaments // Project Gutenberg [Электронный ресурс] : Free eBooks. – URL: http://www.gutenberg.org/files/42833/42833-pdf.pdf?session_id= ea140f8b84963afd006766769f6f99d1a37a51c9 (дата обращения: 15.09.2020). – Загл. с экрана.

Далее рассматриваются простые турниры, приводится алгоритм их проверки на простоту, реализованный на языке программирования C++ для выполнения вычислительного эксперимента, а также результаты этого эксперимента в таблице 1 и выдвигается гипотеза о доле простых турниров среди общего их числа.

Таблица 1 – Результаты проверки на простоту турниров с количеством вершин $1 \leq n \leq 11$

n	Количество турниров	Количество простых турниров	% простых турниров
1	1	1	100
2	1	1	100
3	2	1	50
4	4	0	0
5	12	3	25
6	56	15	26,8
7	456	197	43,2
8	6880	4008	58,3
9	191 536	136 655	71,3
10	9 733 056	7 906 161	81,2
11	903 753 248	796 876 429	88,2

В третьем разделе рассматривается связь простоты турнира с такой его характеристикой как диаметр. Здесь в таблице 2 приводятся результаты вычислительного эксперимента по подсчёту количества турниров фиксированной размерности с диаметром различного значения.

Таблица 2 – Результаты подсчёта турниров различного диаметра для $n \leq 11$

Диаметр	Размерность					
	6	7	8	9	10	11
∞	21	103	872	13 403	377 107	19 288 658
2	3	28	395	12 741	772 550	87 117 224
3	24	243	4451	139 951	7 683 411	744 296 620
4	7	71	1027	23 294	850 063	51 244 862
5	1	10	121	1951	46 574	1 726 123
6	–	1	13	179	3085	79 940
7	–	–	1	16	246	4476
8	–	–	–	1	19	322
9	–	–	–	–	1	22
10	–	–	–	–	–	1

По его результатам сформулированы 2 теоремы и 1 предложение, которые доказываются в ходе работы.

ТЕОРЕМА 1. Для каждой размерности $n \geq 5$ существует 1 турнир с диаметром $n-1$, причём он будет простым[6].

ТЕОРЕМА 2. Для каждой размерности $n \geq 6$ существует $3n-11$ турниров с диаметром $n-2$, причём $2n-10$ из них будут являться простыми, а $n-1$ – нет[7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Турниры, имеющие бесконечный диаметр, простыми не являются.

Также приводятся примеры построения турниров по схемам, представленным в теоремах.

В четвёртом разделе для турниров рассматриваются конгруэнции фиксированных размерностей, а именно содержащие 2, 3 и 4 вершины.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов по подсчёту их количества. На основе результатов этих экспериментов сформулированы и доказаны 3 предложения о турнирах, содержащих $n-4$ 3-вершинные конгруэнции, и приведены схемы построения таких турниров.

$$
\begin{matrix}
0 & 1 & \dots & & 1 \\
0 & 0 & 1 \dots & & 1 \\
 & & & & \\
0 & \dots & & 0\ 1 & 0 \\
0 & & & 0 & 1 \\
0 & \dots & 0\ 1 & 0 & 0
\end{matrix}
$$

Рисунок 11 – Общий вид матрицы смежности турнира первого вида

[6]Шабаркова, А.О. Об одном классе простых турниров // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2019». – М., 2019.

[7] Шабаркова, А.О. О турнирах с диаметром n-2 // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020» [Электронный ресурс] : Второе издание: переработанное и дополненное. – URL: https://lomonosov-msu.ru/archive /Lomonosov_2020_2/data/19359/117212_uid340811_report.pdf (дата обращения: 22.01.2021). – Загл. с экрана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Турнир с числом вершин 7 и более с матрицей смежности вида, изображённого на рисунке 11, имеет $n-4$ 3-вершинных конгруэнций.

0 1 0 1 … 1
0 0 1 … 1
1 0 0 1 … 1
⋰ …
0 … 0 1 1
0 0 1
0 … 0

Рисунок 13 – Общий вид матрицы смежности турнира второго вида

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Турнир с числом вершин 7 и более с матрицей смежности вида, изображённого на рисунке 13, имеет $n-4$ 3-вершинных конгруэнций.

0 1 … 1 0 1
0 0 1 … 1

0 … 0 1 1 1
0 0 1 1
1 0 … 0 0
0 … 0 1 0

Рисунок 15 – Общий вид матрицы смежности турнира третьего вида

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Турнир с числом вершин 7 и более с матрицей смежности вида, изображённого на рисунке 15, имеет $n-4$ 3-вершинных конгруэнций.

В этой части также приводятся результаты эксперимента по подсчёту турниров, содержащих только 2-вершинные конгруэнции, только 3-вершинные и 2- и 3-вершинные конгруэнции вместе (таблица 5), а также эксперимента по подсчёту турниров с фиксированным размером наибольшей по числу вершин конгруэнции (таблица 6), и анализ полученных результатов.

Таблица 5 – Результаты подсчёта турниров с 2-вершинными и 3-вершинными конгруэнциями для $n \leq 11$

	Число вершин						
Размер конгруэнции, вершины	5	6	7	8	9	10	11
Только 2	3	18	150	1 939	40 848	1 440 991	87 417 155
Только 3	2	5	22	158	1 916	39 386	1 386 994
И 2, и 3 вместе	4	12	51	339	3 593	63 705	1 959 822

Таблица 6 – Результаты подсчёта турниров в зависимости от размера конгруэнции, содержащей максимальное количество вершин $n \leq 11$

	Число вершин						
Размер конгруэнции, содержащей максимальное количество вершин	5	6	7	8	9	10	11
2	1	12	108	1 592	36 372	1 348 416	84 205 747
3	2	5	28	264	3 794	83 192	2 969 298
4	6	4	11	65	552	7 788	169 016
5	–	20	12	39	205	1 740	23 556
6	–	–	100	56	198	979	8 408
7	–	–	–	856	456	1 708	8 086
8	–	–	–	–	13 304	6 880	26 596
9	–	–	–	–	–	376 192	191 536
10	–	–	–	–	–	–	19 274 576

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрен вид графов, называемых турнирами, и некоторые их свойства, в частности простота и её связь с одной из характеристик графов, а именно с диаметром. В результате исследования были сформулированы и доказаны теоремы, описывающие турниры с диаметром на единицу меньшим, чем их размерность, и с диаметром на две единицы меньшим, чем их размерность, а также предложение о непростоте турниров с бесконечным диаметром.

Также были изучены непростые турниры, содержащие различное количество классов конгруэнций фиксированного размера, а именно содержащие 2, 3 и 4 вершины. В ходе этого исследования были сформулированы и доказаны 3 предложения о турнирах, содержащих $n-4$ 3-вершинные конгруэнции.

Другой частью работы были вычислительные эксперименты, для проведения которых был написан комплекс программ на языке C++. С их помощью была проведена проверка на простоту всех турниров с количеством вершин $n \leq 11$, подсчитано количество турниров различного диаметра с количеством вершин $n \leq 11$, подсчитано количество турниров, имеющих 2-, 3- и 4-вершинные конгруэнции, для размерностей $n \leq 11$ и подсчитано количество турниров с различным размером максимальной по числу вершин конгруэнции для размерностей $n \leq 11$.

Таким образом, все поставленные задачи решены полностью.