МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНОВ К ВОПРОСАМ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 248 группы
направления 09.04.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета
Костиной Алины Александровны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент ______________ С. С. Волосивец

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2021

СОДЕРЖАНИЕ

1 Периодические B-сплайны

Предположим, что $N = mn$ и $m \geq 2$. Введем сигнал

$$x_1(j) = \begin{cases} n - j, j \in 0 : n-1, \\ 0, j \in n : N-n, \\ j - N + n, j \in N-n+1 : N-1, \end{cases} \tag{1}$$

и найдем его дискретное преобразование Фурье $X_1 = F_N(x_1)$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$X_1(k) = \begin{cases} n^2, k = 0, \\ (\frac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)})^2, k \in 1 : N-1. \end{cases} \tag{2}$$

Сигнал x_1 характеризуется двумя свойствами: равенством $x_1(ln) = n\delta_m(l)$ и линейностью на каждом промежутке $ln : (l+1)n, l \in Z$.

Положим

$$Q_1 = x_1; Q_r = Q_1 * Q_{r-1}, r = 2, 3, ... \tag{3}$$

Сигнал Q_r называется дискретным периодическим B-сплайном порядка r. Согласно (1) и (3) он принимает только неотрицательные значения (рисунок 1).

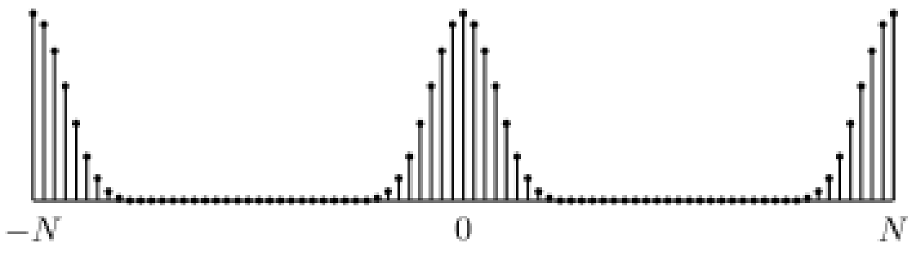

Рисунок 1 – График B-сплайна $Q_r(j)$ при $m = 8, n = 5, r = 2$

Теорема 1. *При всех натуральных* r

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^r(k) w_N^{kj}, j \in Z. \tag{4}$$

Формулу (4) можно считать определением B-сплайна порядка r. Она имеет смысл и при $m = 1$. В этом случае равенство (2) принимает вид $X_1 = N^2\delta_N$, так что согласно (4) получаем $Q_r(j) \equiv N^{2r-1}$.

Отметим также, что при $m = N$ (и $n = 1$)

$$Q_r(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} w_N^{kj} = \delta_N(j)$$

для всех натуральных r.

В дальнейшем нам потребуются значения $Q_r(pn)$ при $p \in 0 : m-1$. Вычислим их. Воспользуемся тем, что любой индекс $k \in 0 : N-1$ можно представить в виде $k = qm + l$, где $q \in 0 : n-1, l \in 0 : m-1$. Согласно (4) имеем

$$Q_r(pn) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm+l) w_N^{pn(qm+l)} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} w_m^{pl} \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm+l).$$

Обозначив

$$T_r(l) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm+l), \tag{5}$$

получим

$$Q_r(pn) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} T_r(l) w_m^{pl}. \tag{6}$$

Отметим, что сигнал $T_r(l)$ в силу n-периодичности сигнала $f(q) = X_1^r(qm+l)$ является m-периодическим. Действительно, при целом s

$$T_r(l+sm) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} X_1^r((q+s)m+l) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} f(q+s) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} f(q) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm+l) = T_r(l).$$

Мы воспользовались леммой (**??**).

Преобразуем формулу (5). При $l \in 1 : m-1$ введем величину

$$\Lambda_r(l) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} (2 \sin \frac{\pi(qm+l)}{N})^{-2r}.$$

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$T_r(l) = \begin{cases} n^{2r-1}, l = 0 \\ (2 \sin \frac{\pi l}{m})^{2r} \Lambda_r(l), l \in 1 : m-1. \end{cases} \tag{7}$$

Из (7), в частности, следует, что $T_r(l) > 0$ при всех $l \in Z$.

На рисунке 2 изображены графики сигнала $T_r(l)$ на основном периоде $0 : m-1$ при $m = 512, n = 2, r = 2, 3, 4$.

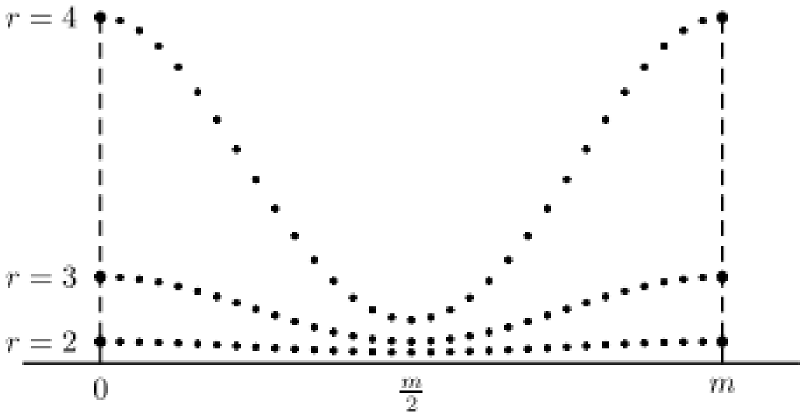

Рисунок 2 – Графики сигнала $T_r(l)$ при $m = 32, n = 2, r = 2, 3, 4$

Установим связь между дискретными периодическими В-сплайнами и дискретными периодическими функциями Бернулли.

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} n^{2r} + \sum_{l=-r}^{r} (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} b_{2r}(j + r - ln). \tag{8}$$

2 Дискретные периодические сплайны

Пусть $N = mn$ и $N \geq 2$. Дискретный периодический сплайн $S(j)$ порядка r определяется как линейная комбинация с комплексными коэффициентами сдвигов B-сплайна $Q_r(j)$:

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn). \tag{9}$$

Множество сплайнов вида (9) обозначим через S_r^m. Поскольку $Q_r(j) = \sigma N(j)$ при $m = N$, то в силу леммы (**??**) $S_r^N = C_N$ для всех натуральных r. При $m = 1$ имеем $Q_r(j) \equiv N^{2r-1}$, поэтому S_r^1 есть множество сигналов, тождественно равных комплексной константе.

Лемма 3. *Базисные сигналы $Q_r(j - pn), p \in 0 : m - 1$, линейно независимы на Z.*

Очевидно, что S_r^m есть линейное комплексное пространство. Оно является подпространством C_N . На основании леммы (3) можно утверждать, что размерность S_r^m равна m.

Лемма 4. *Справедливо тождество*

$$\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j - pn) \equiv n^{2r-1}. \tag{10}$$

Из (10), в частности, следует, что сигнал, тождественно равный комплексной константе, принадлежит S_r^m.

Можно дать эквивалентное определение дискретного периодического сплайна с помощью функций Бернулли.

Теорема 3. *Для того чтобы сигнал S принадлежал подпространству S_r^m, необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление*

$$S(j) = d + \sum_{l=0}^{m-1} d(l) b_{2r}(j + r - ln), \tag{11}$$

где $\sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0$.

Приведем одно важное для дальнейшего свойство дискретных периодических сплайнов.

Теорема 4. *Для произвольного сплайна* $S \in S_r^m$ *и произвольного сигнала* $x \in C_N$ *справедливо соотношение*

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j) \Delta^r x(j) = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d(l) x(ln) \tag{12}$$

где $d(l)$ *— коэффициенты из представления* (11) *сплайна* S.

3 Сплайн-интерполяция

Рассмотрим на множестве S_r^m дискретных периодических сплайнов порядка r интерполяционную задачу

$$S(ln) = z(l), l \in 0 : m-1, \qquad (13)$$

где $z(l)$ - произвольные комплексные числа. Подробная запись задачи (13) имеет вид

$$\sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r((l-p)n) = z(l), l \in 0 : m-1. \qquad (14)$$

Таким образом, задача дискретной сплайн-интерполяции сводится к решению систему линейных уравнений (14) относительно коэффициентов сплайна $c(p)$.

Введем сигнал $h(p) = Q_r(pn)$. С его помощью систему (13) можно переписать так:

$$\sum_{p=0}^{m-1} c(p) h(l-p) = z(l), l \in 0 : m-1,$$

или более компактно $c* = z$. Переходя в спектральную область, получаем эквивалентную систему уравнений

$$C(k)H(k) = Z(k), k \in 0 : m-1, \qquad (15)$$

где $C = F_m(c), Z = F_m(z)$ и

$$H(k) = \sum_{p=0}^{m-1} h(p) w_m^{-kp}.$$

Согласно (6), $H(k) = T_r(k)$, причем, как отмечалось после доказательства леммы (2), все значения $T_r(k)$ положительны. Система (15) имеет единственной решение $C(k) = Z(k)/T_r(k), k \in 0 : m-1$. По формуле обращения для ДПФ

$$c(p) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} [Z(k)/T_r(k)] w_m^{kp}, p \in 0 : m-1. \tag{16}$$

Подведем итог.

Теорема 5. *Интерполяционная задача* (13) *имеет единственное решение. Для коэффициентов интерполяционного сплайна* S_* *справедлива формула* (16).

Покажем, что дискретный интерполяционный сплайн S_* обладает экстремальным свойством. Попутно выяснится роль параметра r.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) := \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x(j)|^2 \to \min, x(ln) = x(l), l \in 0 : m-1; x \in C_N. \tag{17}$$

Теорема 6. *Единственным решением задачи* (17) *является дискретный интерполяционный сплайн* S_*.

4 Сглаживание дискретных периодических данных

Рассмотрим при $N = mn$ задачу сглаживания дискретных периодических данных в следующей постановке:

$$f(x) := \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x(j)|^2 \to \min, g(x) := \sum_{l=0}^{m-1} |x(ln) - z(l)|^2 \leq \epsilon, x \in C_N, \quad (18)$$

где $\epsilon > 0$ - фиксированное число(параметр). Таким образом, требуется найти сигнал $x_* \in C_N$, обеспечивающий заданную точность аппроксимации $g(x_*) \leq \epsilon$ данных $z(l)$ на крупной сетке $ln_{l=0}^{m-1}$ и имеющий минимальный квадрат нормы конечной разности r-го порядка. Последнее условие характеризует "плавность"искомого сигнала.

Отметим, что при $\epsilon = 0$ задача (18) равносильна задаче (17).

Предварительно решим вспомогательную задачу

$$q(c) := \sum_{l=0}^{m-1} |c - z(l)|^2 \to \min, \quad (19)$$

где минимум берется по всем $c \in C$. Имеем

$$q(c+h) = \sum_{l=0}^{m-1} |(c - z(l)) + h|^2 =$$

$$= q(c) + m|h|^2 + 2Re \sum_{l=0}^{m-1} (c - z(l))\bar{h}.$$

Очевидно, что единственная точка минимума x_* функции $q(c)$ определяется из условия

$$\sum_{l=0}^{m-1} (c - z(l)) = 0,$$

так что

$$c_* = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} z(l). \quad (20)$$

При этом

$$\epsilon_* := q(c_*) = -\sum_{l=0}^{m-1}(c_* - z(l))\bar{z}(l) = \sum_{l=0}^{m-1}|z(l)|^2 - m|c_*|^2. \tag{21}$$

Величина ϵ_* есть критическое значение параметра ϵ. При $\epsilon \geq \epsilon_*$ решением задачи (18) является сигнал $x_*(j) \equiv c_*$, поскольку в этом случае $g(x_*) = q(c_*) = \epsilon_* \leq \epsilon$ и $f(x_*) = 0$. В дальнейшем считаем, что $0 < \epsilon < \epsilon_*$. В частности, $\epsilon_* > 0$. Это гарантирует, что $m \geq 2$ и $z(l \neq) const$.

Зафиксируем параметр $a > 0$, введем функцию

$$F_a(x) = af(x) + g(x)$$

и рассмотрим еще одну вспомогательную задачу

$$F_a(x) \to \min, \tag{22}$$

где минимум берется по всем $x \in C_N$. Возьмем произвольный сплайн $S \in S_r^m$ и запишем разложение

$$F_a(S+H) = af(S+H) + g(S+H) =$$

$$a[f(S) + f(H) + 2Re\sum_{j=0}^{N-1}\Delta^r S(j)\Delta^r \bar{H}(j)] +$$

$$+g(S) + \sum_{l=0}^{m-1}|H(ln)|^2 + 2Re\sum_{l=0}^{m-1}[S(ln) - z(l)]\bar{H}(ln).$$

Имеем

$$F_a(S+H) = F_a(S) + af(H) + \sum_{l=0}^{m-1}|H(ln)|^2 + 2Re\sum_{l=0}^{m-1}[(-1)^r ad(l) + S(ln) - z(l)]\bar{H}(ln).$$

Здесь $d(l)$ - коэффициенты разложения сплайна S по сдвигам условиям

$$(-1)^r ad(l) + S(ln) = z(l), l \in 0 : m-1, \sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0. \tag{23}$$

Тогда для любого $H \in C_N$ будет выполняться равенство

$$F_a(S_a + H) = F_a(S_a) + af(H) + \sum_{l=0}^{m-1} |H(ln)|^2.$$

Из него, в частности, следует, что $F_a(S_a + H) \geq F_a(S_a)$, так что S_a - решение задачи (22). Более того, это единственное решение. Действительно, допустив, что $F_a(S_a + H) = F_a(S_a)$, получим

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r H(j)|^2 = 0$$

и

$$\sum_{l=0}^{m-1} |H(ln)|^2 = 0.$$

Первое равенство выполняется только тогда, когда $H(j) \equiv const$ (теорема (**??**)). Согласно второму равенству $H(j) \equiv 0$.

Остается проверить, что система (23) имеет единственное решение в классе сплайнов S. Возьмем решение $d_0, d_0(0), d_0(1), ..., d_0(m-1)$ однородной системы

$$(-1)^r ad(l) + S(ln) = 0, l \in 0 : m-1, \sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0. \tag{24}$$

Соответствующий сплайн обозначим через S_0. Согласно (24) имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r S_0(j)|^2 = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d_0(l)\bar{S}_0(ln) = -a \sum_{l=0}^{m-1} |d_0(l)|2.$$

В силу положительности a это равенство возможно только тогда, когда все $d_0(l)$ равны нулю. Но в этом случае $S_0(j) \equiv d_0$. Вместе с тем, $S^0(ln) = (-1)^{r+1} ad_0(l) = 0$ при $l \in 0 : m-1$, так что $d_0 = 0$. Доказано, что однородная система (24) имеет только нулевое решение. Как следствие, получаем, что система (23) имеет единственное решение при любых $z(l), l \in 0 : m-1$.

Теорема 7. *Вспомогательная задача* (22) *имеет единственное решение* S_a. *Это дискретный периодический сплайн, коэффициенты которого определяются из системы линейных уравнений* (23).

Покажем, что система (23) может быть решена явно. Для этого перейдем в спектральную область:

$$(-1)^r a \sum_{l=0}^{m-1} d(l) w_m^{-kl} + d \sum_{l=0}^{m-1} w_m^{-kl} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m-1} d(p) b_{2r}((l-p)n + r) w_m^{-kl} = \sum_{l=0}^{m-1} z(l) w_m^{-kl}.$$

Обозначим $D = F_m(d), Z = F_m(z)$. Учитывая, что $kl = k(l-p) + kp$, получаем

$$(-1)^r a D(k) + m d b_m(k) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{m-1} d(p) w_m^{-kp} \sum_{l=0}^{m-1} b_{2r}(ln + r) w_m^{-kl} = Z(k).$$

Отметим, что $D(0) = \sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0$. Положив

$$B_r(k) = \sum_{l=0}^{m-1} b_{2r}(ln + r) w_m^{-lk},$$

придем к системе линейных уравнений относительно $d, D(1), ..., D(m-1)$:

$$[(-1)^r a + B_r(k)] D(k) + m d b_m(k) = Z(k), \tag{25}$$

$$k \in 0 : m-1.$$

При $k = 0$ имеем

$$d = \frac{1}{m} Z(0) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} z(l) = c_*.$$

При $k \in 1 : m-1$ уравнение (25) принимает вид

$$[(-1)^r a + B_r(k)]D(k) = Z(k). \tag{26}$$

Лемма 5. *При $k \in 1 : m-1$ справедливо равенство*

$$[B_r(k) = (-1)^r \Lambda_r(k), \tag{27}$$

где

$$\Lambda_r(k) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}(2\sin\frac{\pi(qm+k)}{N})^{-2r}.$$

На основании (26) и (27) запишем $D(k) = \begin{cases} 0, k=0, \\ \dfrac{(-1)^r Z(k)}{a+\Omega_r(k)}, k \in 1 : m-1. \end{cases}$

По формуле обращения для ДПФ

$$d(l) = \frac{(-1)^r}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{Z(k)w_m^{kl}}{a+\Omega_r(k)}, l \in 0 : m-1. \tag{28}$$

Явное решение системы (23) найдено.

Решение вспомогательной задачи (22) получено в виде (11):

Преобразуем его к виду (9):

Теорема 8. *Сглаживающий сплайн $S_a(j)$ допускает представление*

$$S_a(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c_a(p) Q_r(j-pn), \tag{29}$$

где

$$c_a(p) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{Z(k)w_m^{kp}}{T_r(k) + a(2\sin(\pi k/m))^{2r}}. \tag{30}$$

Отметим, что при $a = 0$ формула (30) для коэффициентов сглаживающего сплайна совпадает с формулой (16) для коэффициентов интерполяционного сплайна.

Введем функцию $\varphi(a) = g(S_a)$. Согласно (18), (23) и равенству Парсеваля имеем

$$\varphi(a) = a^2 \sum_{l=0}^{m-1} |d(l)|^2 = \frac{a^2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |D(k)|^2 =$$

$$= \frac{a^2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|Z(k)|^2}{(a+\Omega_r(l))^2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|Z(k)|^2}{(1+\Omega_r(k)/a)^2}.$$

Напомним, что $z(l) \neq const$, поэтому хотя бы одна из компонент $Z(1), ...,$ $Z(m-1)$ дискретного преобразования Фурье отлична от нуля.

Функция $\varphi(a)$ на полуоси $(0, +\propto)$ строго возрастает, причем $\lim\limits_{a\to+0} \varphi(a) = 0$. Найдем предел $\varphi(a)$ при $a \to +\propto$. С учетом (20) и (21) получаем

$$\lim_{a\to+\propto} \varphi(a) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} |Z(k)|^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |Z(k)|^2 - \frac{1}{m}|Z(0)|^2 =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} |z(l)|^2 - \frac{1}{m}|\sum_{l=0}^{m-1} z(l)|^2 = \sum_{l=0}^{m-1} |z(l)|^2 - m|c_*|^2 = \epsilon_*,$$

где ϵ_* - критическое значение параметра ϵ. Отсюда, в частности, следует, что уравнение $\varphi(a) = \epsilon$ при $0 < \epsilon < \epsilon_*$ имеет единственный положительный корень a_*.

Теорема 9. *Дискретный периодический сплайн S_a, является единственным решением задачи* (18).

5 Метод касательных гипербол

В предыдущем пункте было установлено, что при $0 < \epsilon < \epsilon_*$ единственным решением задачи сглаживания (18) является дискретный периодический сплайн $S_a(j)$ вида (29) с $a = a_*$, где a_* — единственный положительный корень уравнения $\varphi(a) = \epsilon$. Рассмотрим вопрос о вычислении a_*.

Введем функцию

$$\psi(b) = \varphi(\frac{1}{b}) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} \frac{|Z(k)|^2}{(1+\Omega_r(k)b)^2}.$$

На интервале $(-t, +\infty)$, где $t = min_{k\in 1:m-1}(\Omega_r(k))^{-1}$, выполняются неравенства $\psi'(b) < 0$, $\psi''(b) > 0$, поэтому на $(-t, +\infty)$ функция $\psi(b)$ является строго убывающей и строго выпуклой. При этом $\psi(0) = \epsilon_*$ и $lim_{b\to+\infty}\psi(b) = 0$. Если b_* — положительный корень уравнения $\psi(b) = \epsilon$, то $a_* = 1/b_*$. Таким образом, вместо уравнения $\varphi(a) = \epsilon$ можно решать уравнение $\psi(b) = \epsilon$.

Рассмотрим равносильное уравнение $(\psi(b))^{-1/2} = \epsilon^{-1/2}$ и будем решать его методом Ньютона с начальным приближением $b_0 = 0$. Расчетная формула метода имеет вид

$$b_{k+1} = b_k - \frac{\psi^{-1/2}(b_k) - \epsilon^{-1/2}}{(-1/2)\psi^{-3/2}(b_k)\psi'(b_k)} = b_k + \frac{2\psi(b_k)}{\psi'(b_k)}[1 - (\frac{\psi(b_k)}{\epsilon})^{1/2}], k = 0, 1, ... \tag{31}$$

Выясним, чему соответствует такой метод применительно к уравнению $\psi(b) = \epsilon$.

Лемма 6. *Функция $[\psi(b)]^{-1/2}$ на интервале $(-t, +\infty)$ строго возрастает и вогнута.*

Согласно вогнутости функции $[\psi(b)]^{-1/2}$, при $b \geq 0$ имеем

$$\psi^{-1/2}(b) - \psi^{-1/2}(b_k) \leq -\frac{1}{2}\psi^{-3/2}(b_k)\psi'(b_k)(b - b_k),$$

так что

$$0 < \psi^{-1/2}(b) \leq \psi^{-1/2}(b_k)[1 - \frac{\psi'(b_k)}{2\psi(b_k)}(b - b_k)].$$

Возведя в степень -2, получим

$$\psi(b) \geq \psi(b_k)[1 - \frac{\psi'(b_k)}{2\psi(b_k)}(b - b_k)]^{-2}. \qquad (32)$$

Обозначим функцию, стоящую в правой части неравенства (32), через $C_k(b)$. График этой функции является гиперболой, которая в силу (32) лежит под графиком функции$\psi(b)$. Поскольку $C_k(b_k) = \psi(b_k)$ и $C'_k(b_k) = \psi'(b_k)$, то указанные графики касаются друг друга при $b = b_k$ (рисунок (3)).

Более того, корень b_{k+1} уравнения $C_k(b) = \epsilon$ вычисляется по формуле (31).

Сказанное дает основание назвать итерационный метод (31) для решения уравнения $\psi(b) = \epsilon$ методом касательных гипербол.

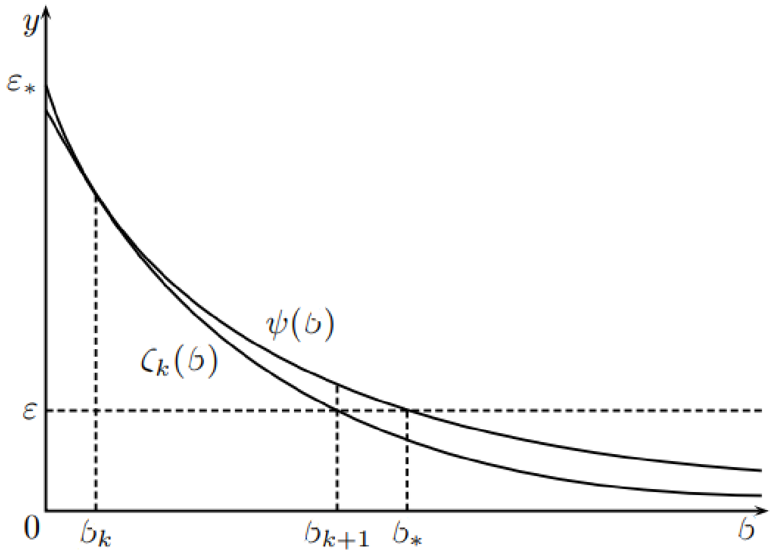

Рисунок 3 – Метод касательных гипербол

6 Вычисление значений дискретного сплайна

Начнем с дискретного периодического сплайна первого порядка

$$S_1(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_1(j - pn). \tag{33}$$

Коэффициенты $c(p)$ считаются продолженными с периодом m на все целые p. В частности, $c(m) = c(0)$.

Лемма 7. *Значения $S_1(0), S_1(1), ..., S_1(N)$ вычисляются последовательно по схеме*

$$S_1(0) = nc(0);$$

$$S_1(ln + k + 1) = S_1(ln + k) + \Delta c(l), \tag{34}$$

$$k \in 0 : n - 1, l \in 0 : m - 1.$$

Приведем программу, реализующую вычисления по схеме (34).

```
s1(0) := n * c(0); j := 0;
for l := 0 to m - 1 do
begin h := c(l + 1) - c(l);
for k := 1 to n do
begin j := j + 1;
s1(j) := s1(j - 1) + h end
end
```

Видим, что вычисление значений $S_1(j)$ при $j = 0, 1, ..., N$ требует одного умножения на n и $(n + 1)m$ сложений.

Перейдем к общему случаю дискретного периодического сплайна порядка r. С помощью циклической свертки введем последовательность сигналов

$$S_v = Q_1 * S_{v-1}, v = 2, 3, ... \tag{35}$$

Здесь S_1 имеет вид (33).

Теорема 10. *Справедливо равенство*

$$S_r(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn), j \in Z. \tag{36}$$

Теорема (10) показывает, что вычисление значений $S_r(j)$ сводится к вычислению значений $S_1(j)$ и последовательной свертке с B-сплайном $Q_1(j)$. Рассмотрим вопрос о вычислении свертки с Q_1 отдельно. Пусть

$$y(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) Q_1(j - k).$$

Теорема 11. *Справедливо равенство*

$$y(j) = nx(j) + \sum_{k=1}^{n-1} (n - k)[x(j + k) + x(j - k)], \tag{37}$$

$$j \in 0 : N - 1.$$

Зафиксируем $j \in 0 : N - 1$ и введем обозначения

$$d_0 = x(j); d_k = x(j + k) + x(j - k), k \in 1 : n - 1; t_k = n - k.$$

Тогда формулу (37) можно переписать в виде

$$y(j) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k t_k.$$

Построим числовую последовательность h_k по правилу

$$h_k = d_k + h_{k-1}, k = 0, 1, ..., n - 1; h_{-1} = 0. \tag{38}$$

Учитывая, что $t_k - t_{k+1} = 1$, получаем

$$y(j) = \sum_{k=0}^{n-1} (h_k - h_{k-1}) t_k = \sum_{k=0}^{n-1} h_k t_k - \sum_{k=-1}^{n-2} h_k t_{k+1} =$$

$$= h_{n-1}t_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} h_k = \sum_{k=0}^{n-1} hk.$$

Таким образом,

$$y(j) = \sum_{k=0}^{n-1} hk, \tag{39}$$

где h_k вычисляются по рекуррентной формуле (38).

Приведем программу вычисления значений $y(j)$ при $j \in 0 : N - 1,$, основанную на представлении (39).

```
for j := 0 to n - 1 do
begin h := x(j); s := h;
for k := 1 to n - 1 do
begin h := h + x(j + k) + x(j - k);
s := s + h end;
y(j) := s
end
```

В программе используются только сложения в количестве $3(n - 1)N$.

У сигнала x должны быть явно заданы значения $x(j)$ при j от $(-n+1)$ до $N + n - 2$. В силу периодичности следует положить

$$x(j) = x(N + j), j \in -n + 1 : -1;$$

$$x(j) = x(j - N), j \in N : N + n - 2.$$

7 Ортогональный базис в пространстве сплайнов

Рассмотрим дискретный периодический сплайн

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn) \tag{40}$$

и преобразуем его коэффициенты по правилу $\xi = F_m(c)$. Учитывая формулу обращения для ДПФ, запишем

$$S(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m-1} \xi(k) w_m^{kp} Q_r(j - pn) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} w_m^{kp} Q_r(j - pn). \tag{41}$$

Введем обозначение

$$\mu_k(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} w_m^{kp} Q_r(j - pn), k \in 0 : m - 1. \tag{42}$$

Тогда формула (41) примет вид

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m-1} \epsilon(k) \mu_k(j). \tag{43}$$

Очевидно, что сигналы μ_k принадлежат S_r^m. Согласно (43) они образуют базис в S_r^m. Покажем, что это ортогональный базис.

Лемма 8. *Справедливо равенство*

$$\mu_k(j) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm + k) w_N^{(qm+k)j}. \tag{44}$$

Теорема 12. *Справедливы соотношения*

$$(\mu_k, \mu_{k'}) = 0, k \neq k', \tag{45}$$

$$||\mu||^2 = \frac{1}{m} T_{2r}(k), k \in 0 : m-1.$$

Установлено, что сплайны $\mu_{k_k}^{m-1} = 0$ образуют ортогональный базис в пространстве S_r^m. Переход от разложения (40) к разложению (43) основан на преобразовании коэффициентов $\epsilon = F_m(c)$. Обратный переход связан с формулой обращения для ДПФ: $c = F_m^{-1}(\epsilon)$.

Отметим, что в силу (44) и (2)

$$\mu_0(j) \equiv N^{-1} n^{2r}. \tag{46}$$

Лемма 9. *При $k \in 1 : m-1$ справедливо равенство*

$$\mu_{m-k}(j) = \bar{\mu_k}(j), j \in Z. \tag{47}$$

Лемма 10. *При всех целых l справедливо равенство*

$$\mu_k(j + ln) = w_m^{kl} \mu_k(j), j \in Z. \tag{48}$$

Действительно,

$$mu_k(j + ln) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} w_m^{k(p-l)+kl} Q_r(j - (p-l)n) = w_m^{kl} mu_k(j).$$

Теорема 13. *Пусть $k \in 1 : m-1$ и p — натуральное число. Если произведение kp не делится на m, то*

$$\sum_{j=0}^{N-1} [\mu_k(j)]^p = 0.$$

Рассмотрим частные случаи. При $p = 1$ имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mu_k(j) = 0, k \in 1 : m-1.$$

Пусть $p = 2$. При $k \in 1 : m-1$ условие $(2k)_m \neq 0$ сводится к соотношению $2k \neq m$. Таким образом, при $k \in 1 : m-1$, $k \neq m/2$ справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1}[\mu_k(j)]^2 = 0.$$

Видим, что среди значений $\mu_k(j)$ при указанных k обязательно имеются комплексные. Вместе с тем, при четном m все значения $\mu_{m/2}(j)$ вещественны, поскольку

$$\mu_{m/2}(j) = \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1}(-1)^p Q_r(j-pn). \tag{49}$$

Вернемся к формуле (42) и перепишем ее так:

$$\mu_k(j) = \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j-pn)w_m^{pk}.$$

Данная формула имеет вид формулы обращения для ДПФ, поэтому

$$Q_r(j-pn) = \sum_{k=0}^{m-1}\mu_k(j)w_m^{-pk}, p \in 0 : m-1.$$

В частности,

$$Q_r(j) = \sum_{k=0}^{m-1}\mu_k(j), j \in Z. \tag{50}$$