МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Восстановление и сглаживание функции котировок ценных бумаг с помощью синков

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 2 курса 247 группы

направления **09.03.03 Прикладная информатика**

механико-математического факультета

Титовой Екатерины Дмитриевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ________________ А. Ю. Трынин

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор ________________ С. И. Дудов

Саратов 2021

Введение. Актуальность темы. С каждым годом экономическая наука развивается и совершенствуется. Появляются новые инструменты, формулы и операторы, которые помогают проводить анализ и строить прогнозы. Экономика влияет на все сферы нашей жизни и поэтому переоценить её значимость невозможно. Она обеспечивает людей материальными условиями существования — продуктами питания, одеждой, жильем и иными предметами потребления. Экономическая сфера — главная сфера жизни общества, она определяет ход всех происходящих в нем процессов. Спады и подъемы в экономике влияют на ценообразование, что в свою очередь влияет и на нашу жизнь в целом. Но стоит отметить, что не только экономика может влиять на нас, но и мы оказываем на неё существенное влияние, именно мы приводим экономические процессы в движение. Все экономические процессы можно анализировать и прогнозировать, как раз для этих целей создаются математические инструменты и операторы.

Математика как наука возникла в связи с необходимостью решения прикладных задач, то есть можно применять математические инструменты для анализа и прогноза данных любого характера, в том числе и экономического. В работе будет рассмотрен один из сегментов экономики, а именно рынок ценных бумаг. Данная работа актуальна, так как покупка и продажа ценных бумаг стала намного доступнее и проще, чем 20 лет назад. Буквально любой желающий может найти соответстсвующего брокера и стать владельцем акций, облигаций или опционов. Но недостаточно просто купить ценные бумаги, чтобы начать получать прибыть, необходимо правильно выстраивать анализ и прогноз, чтобы собрать подходящий портфель ценных бумаг с комфортным уровнем доходности и риска.

Котировка ценной бумаги представляет собой механизм выявления цены, по которой заключаются сделки и ценные бумаги переходят из рук в руки. Эта цена фиксируется и публикуется в биржевых бюллетенях. Для экономики очень важно уметь обрабатывать данные котировки, чтобы делать определенные выводы и прогнозы на будущее. Котировки ценных бумаг можно представить в виде функции, которую с помощью математических операторов, в нашей работе это будут синки, можно восстановить и сгладить, причём решение этой задачи представляет собой вычисление приближённых значений функции, в том случае, когда известны её значения в определенных точках.

Неизвестные значения функции в точках будут вычислены с помощью математического метода вычисления приближённых значений функции и её производных в случае, когда известны значения функции в некоторых фиксированных точках, так называемых *узлами интерполяции*. В работе значения узлов - это значения времени, в которые сняты отсчёты, например, в течение месяца, а значения функции - это котировки, предположим, акций. Итак, в дискретные моменты времени, обозначим их в общем виде: $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$, наблюдаются значения функции $f(x)$, для которой требуется восстановить её значение при других x, отличных от узловых точек. Такая необходимость возникает в связи со следующими обстоятельствами. При вычислениях на ЭВМ приходится неоднократно вычислять сложную функцию в различных точках. Вместо такого трудоемкого и долгого процесса намного удобнее вычислить значение данной функции в каких-то отдельных выбираемых точках, а для вычисления в других точках, можно воспользоваться упрощенными формулами, в которых фигурируют известные значениями.

Цель исследования работы заключается в восстановление и сглаживание функции котировок ценных бумаг с помощью синков.

Для достижения поставленной цели требовалось:

– Провести анализ теории интерполирования функции;

– Изучить различные виды алгебраического интерполирования;

– Провести анализ интерполяционного многочлена в форме Лагранжа;

– Создать программный продукт, с помощью которого можно осуществлять вычисления значений котировок ценных бумаг по формуле интерполяционного многочлена в форме Лагранжа;

- Провести анализ классической синк-аппроксимации, а так же ввести новые операторы синк-аппроксимации;
- Реализовать численный эксперимент, результаты которого позволят сравнить классический операторы синк-аппроксимации с новыми операторами;
- Реализовать численный эксперимент на «реальных» данных, целью которого будет осуществление технического анализа.

Основное содержание работы. Всю работу можно разбить на три условных блока.

В первом блоке работы, который состоит полностью из первой главы, необходимо определить разницу между акциями, облигациями и опционами, так же стоит отметить важность котировок ценных бумаг, как для экономики в целом, так и для отдельных лиц и рассмотреть различные способы их вычисления. Здесь необходимо будет подробно остановится на теоретической части, включающей в себя такие понятия как:

- методы приближения функции;
- узлы интерполяции;
- интерполяция;
- интерполирование;
- главное условие интерполяции;
- экстрополяция;
- интерполяционный многочлен в общем виде.

Во втором блоке, состоящем из второй, третьей и четвертой главы, следует остановиться на одном из численных методов - интерполяции функции интерполяционным многочленом в форме Лагранжа, для которого определены так называемые *фундаментальные многочлены Лагранжа*(ФМЛ):

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, \text{ при j=k}, \\ 0, \text{ при j} \neq k. \end{cases} \tag{1}$$

где $k = 0, \dots, n$.

Далее представлено следующее множество их комбинаций

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \cdot l_k(x), \tag{2}$$

где f_k - значение искомой функции в узлах интерполяции.

Применяя основную теорему Алгебры к ФМЛ, определенных по формулам (1), можно получить их явное представление

$$l_k(x) = C_k(x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) \tag{3}$$

После чего коэффициенты C_k, где $k = 0, \dots, n$, определяются условием нормировки фундаметального многочлена, а именно первой строкой равенства (1). С этой целью в (3) осуществляется подстановка $x = x_k$

$$l_k(x_k) = C_k(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)$$

Из данного равенства выражается C_k, при $k = 0, \dots, n$

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \tag{4}$$

Осуществляя последовательную подстановку (4) в (3), а затем (3) в (2), можно получить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f_k \prod_{j\neq k, j=0}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \tag{5}$$

Для данного метода приближения функций был написан программный код, который позволит сэкономить время при вычислении значений котировок ценных бумаг. Используя полученные результаты, можно проанализировать преимущества и недостатки метода и сформулировать промежуточные итоги.

Для реализации практической части были взяты из общедоступных источников уже посчитанные данные, которые заново вычисляли, непосредственно используя формулы, описанные выше (во второй главе работы). В качестве котировок в примере служат акции компании Apple. Значениями интерполяционных узлов является значение времени, в которое сняты отсчеты (снимаются в течении 40 минут). Частота сетки, на которой запрашивается стоимость акции составляет 10 минут. Для наглядности дана таблица 1:

Таблица 1

t, время	18.30	18.40	18.50	19.00	19.10
usd, цена	144.21	144.02	143.90	144.03	143.97

Значениями функции являются акции, а точнее их цена продажи на шестое апреля текущего года. Имеется некоторая функция f, определенная таблицей 1. Функция f известна только в узлах интерполяции, которые указаны в таблице 1, а именно: $18.30, 18.40, 18.50, 19.00, 19.10$. Сама цель численного эксперимента состоит в нахождении значений функции f в точках, отличных от узловых. Для этого используя программный продукт, вычисляется интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

Так же дана развернутая таблица 2, с которой сверяются и анализируются полученные при использовании программного кода данные

Таблица 2

t, время	18.30	18.35	18.40	18.45	18.50	18.55	19.00	19.05
usd, цена	144.21	144.11	144.02	144.05	143.90	144.07	144.03	143.97

В заключительном этапе работы, который состоит из глав 5 и 6, изучаются аппроксимативные свойства синк-приближений функции и рассчитываются погрешности вычислений. Для этого вводится оператор синк-аппроксимации, имееющий вид

$$L_n(f,x) = \sum_{k=o}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f(\frac{k\pi}{n}). \tag{6}$$

Так же стоит отметить, что функция рассматривается на отрезке $[0, \pi]$. Здесь n-колличество узловых точек, причем так как счётчик начинается с нуля, то $n = n - 1$, об этом моменте необходимо помнить. При желании можно перейти к реальному времени, для этого достаточно осуществить следующую замену: $x = \frac{t\pi}{n}$.

Основным моментом будет знакомство с новыми операторами синк-аппроксимации, которые были введены Трыниным А. Ю., а так же проведение численного эксперимента, подтверждающем некоторые свойства данных операторов. Следует отметить, что формула новых операторов получается при некоторой модернизации классических операторов синк-аппроксимации (6). Новые операторы имеют следующий вид:

$$T_n(f,x) = L_n(f,x) + \frac{\sin nx}{2\pi} {\sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]}}' \frac{f(x_{2m+1}, n) - 2f(x_{2m}, n) + f(x_{2m-1}, n)}{p - 2m}, \tag{7}$$

где $p = [\frac{nx}{\pi}]$.

Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с нулевым знаменателем, $[\frac{n-1}{2}]$ и $[\frac{nx}{\pi}]$ обозначают целую часть чисел $\frac{n-1}{2}$, $\frac{nx}{\pi}$ соотвественно. Исходя из формулы (7), видно, что к результату, полученному при вычислении по формуле оператора синк-аппроксимации (6) добавляют некоторое значение. Чтобы понять, какое именно значение добавляют и для чего, подробно рассматривается дробь под знаком суммы, а именно $\frac{f(x_{2m+1},n)-2f(x_{2m},n)+f(x_{2m-1},n)}{p-2m}$, где $p=[\frac{nx}{\pi}]$. Числитель и знаменатель известны, или в случае p можно подсчитать, подставляя значения в указанную дробь, в качестве результата получается числовое значение. Перед знаком суммы стоит следующий множитель $\frac{\sin nx}{2\pi}$. Известно, что при умножении функции $\sin(x)$ на числовое значение (const), сама функция $\sin(x)$ будет либо вытягиваться, либо сужаться по вертикали, в зависимости от числового множителя.

Таким образом, в качестве первого слагаемого в (7) выступает оператор синк-аппроксимации $L_n(f,x)$ (6), а второе слагаемое представляет собой прозведение $\frac{\sin nx}{2\pi}$ на const. Наглядно это выглядит как объединение двух графиков, причем в узловых точках оба графика будут совпадать, а в точках, отличных от узловых происходит наложение. Именно в этом наложение и состоит преимущество нового оператора (7) от синк-аппроксимации (6). Погрешности оператора (6) накладываются с помехами оператора (7), в результате чего погрешности компенсируются и как итог, общая погрешность меньше, чем при приближении оператором (6).

Необходимость введения новых операторов была очевидна, ведь регулярно возникали трудности с приближением непрерывных негладких функций оператором синк-аппроксимации, а так же классические операторы синк-аппроксимации не справляются с приближением функций, меняющих знак. Данная проблема в случае вычисления значений котировок ценных бумаг является критической, ведь как известно, экономика крайне динамична, и цены могут варьироваться от положительных до отрицательных значений.

Для сравнительного анализа проводится численный эксперимент, цель которого выявить с какой точностью будет происходить приближение значений функции при использовании:

– классического оператора синк-аппроксимации (6);

– нового оператора, веденного Трыниным А. Ю. (7).

В качестве вычисляемой функции рассматривается:

$$f(x) = \sin x + 10^{-3} \begin{cases} \cos nx, & x \leq \frac{\pi}{3} \\ -\cos nx, & x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Данная функция берется с некоторым условием. На отрезке $[0, \pi]$ в точке $\frac{\pi}{3}$ функция будет менять свой знак на противоположный. Для примера, на рисунке 1 представлен график функции, меняющей свой знак в нуле

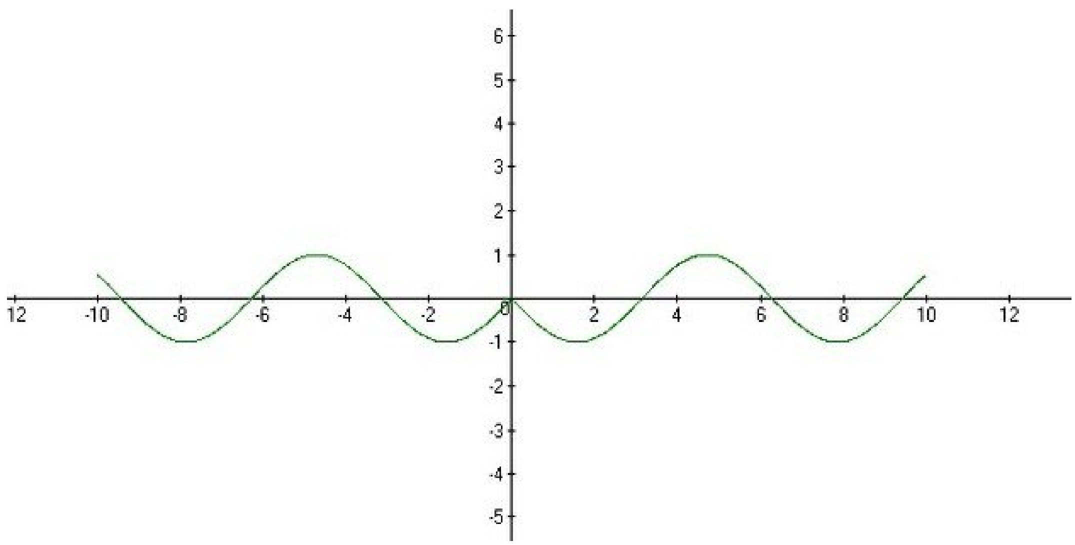

Рисунок 1 - Изменение знака функции

Численный эксперимент показал, что в точке, в которой происходит смена знака, а именно $\frac{\pi}{3}$, погрешность при приближении с помощью синк-аппроксимации (6) растёт за счет отсутствия компенсаций и наложения погрешностей, в то время как погрешность при приближение новым оператором (7) значительно меньше.

На рисунке 2 представлены графики приближения функции на отрезке $[0, \pi]$. График синего цвета получен путём приближения с помощью оператора синк-аппроксимации (6), а график красного цвета - приближение новым оператором (7). Оба оператора рассмотрены для $n = 40$, стоит отметить, что с ростом n погрешность будет расти как $\ln n$.

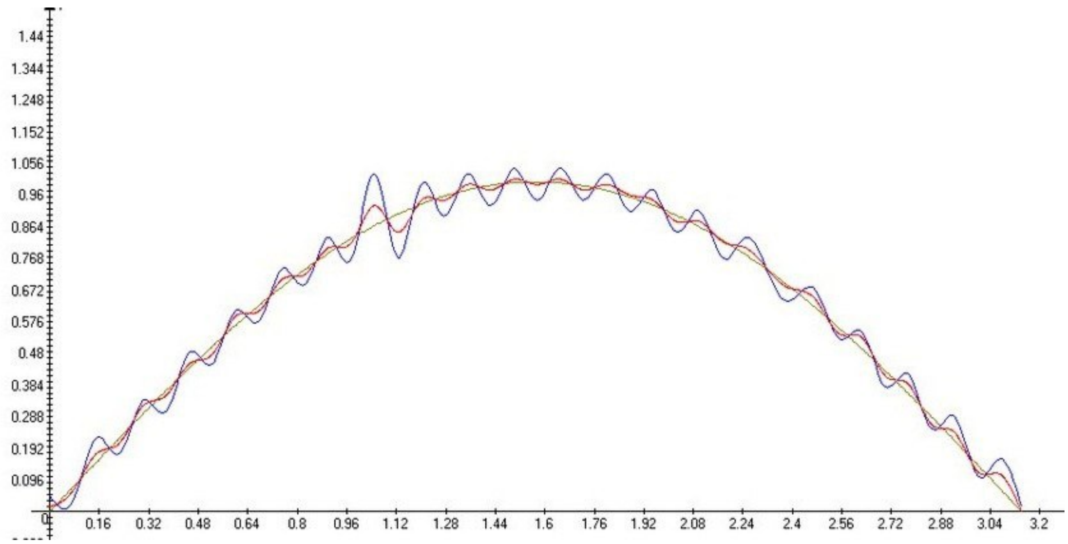

Рисунок 2 - Численный эксперимент

Численный эксперимент был реализован на языке Python. Фрагмент кода:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
x = np.linspace(0, np.pi, num = 40)
def y (x):
    return np.sin(x) + np.cos(x)
    if x <= np.pi/3
        else np.sin(x) - np.cos(x)
# values for making ticks in x and y axis
xnumbers = np.linspace(0, 7, 15)
ynumbers = np.linspace(-1, 1, 11)
plt.plot(x, y(x), 'r')
plt.xticks(xnumbers)
plt.yticks(ynumbers)
plt.legend(['sine', 'cosine'])
plt.grid()
plt.axis([0, 6.5, -1.1, 1.1])
plt.show()
```

Заключение. Цели и задачи, поставленные в начале работы, были успешно выполнены. А именно осуществлено вычисление котировок ценных бумаг с помощью оператора синк-аппроксимации и сделаны выводы об эффективности его использовании.

В ходе работы:

- Отреферирована терия интерполирования функции;
- Создан программный продукт, позволяющий вычислять интерполяционный многочлен в форме Лагранжа, с помощью которого были реализованы вычисления котировок ценных бумах;
- Осуществлен технический анализ полученных результатов;
- Рассмотрены свойства синк-аппроксимации, а так же введены новые опeраторары синк-аппроксимации;
- Проведен численный эксперимент, позволяющий сделать сравнительный анализ классических операторов синк-аппроксимации и новых;
- Реализован численный эксперимент для приближения «реальных» значений котировок ценных бумаг.

Были выявлены следующие минусы интерполяционного многочлена в форме Лагранжа (5).

- Степень многочлена (5) зависит от узлов сетки, а соответственно, увеличивая их число, возрастает и степень данного многочлена, а в свою очередь, это означает, что требуется больше вычислений;
- В 1916 г. наш соотечественник Сергей Натанович Бернштейн рассматривал приближение функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ интерполяционным многочленом (5) с равноотстоящими узлами и показал, что в этом случае не будет даже поточечной сходимости ни в одной точке отрезка

$[-1, 1]$, кроме ± 1. При приближении котировок ценных бумаг, используются равноотстоящие узлы, а следовательно, погрешности в вычислениях не избежать;

– Аппроксимативные свойства многочлена в форме Лагранжа существенно зависят от того, как расположены узлы интерполяции.

Таким образом, интерполяционный многочлен Лагранжа удобен в теоретических исследованиях, но с практической точки зрения не эффективен.

Оператор синк-аппроксимации (6), введенный Э. Борелем и Е. Т. Уиттекером, приближает значения функций лучше, чем любой алгебраический интерполяционный многочлен, в том числе и интерполяционный многочлен в форме Лагранжа, но тем не менее, имеет недостатки:

– сложности с приближением негладких непрерывных функций;

– выдает большой скачок погрешности при приближении функций, меняющих свой знак.

Котировки ценных бумаг ведут себя крайне нестабильно, и построить точный прогноз относительно скачков цен являтся практически невозможным процессом. Для анализа применяют различные математические инструменты, но как правило в большинстве случае возникает проблема появления большой погрешности при приближении функций, меняющих свой знак. Данная проблема крайне критична, так как именно котировки представляют собой функцию с таким свойством. Для решения данной проблемы был введен новый оператор синк-аппроксимации (7), который, справляется с приближением гладких и негладких функций, а так же дает меньшую погрешность при вычислении значений функций, меняющих свой знак в точке. Численные эксперименты, проводимые в работе, позволяют говорить об эффективности оператора (7), при прибилжении значений функции в неузловых точках, а значит данный оператор можно применять для восстановления и сглаживания функции котировок ценных бумаг.