

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**Исследование влияния покрытия на торце на дисперсию и
затухание краевых волн в пластине**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета
Бессоновой Евгении Михайловны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. _____ М.В. Вильде

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _____ Л.Ю. Коссович

Саратов 2021

Введение

Данная бакалаврская работа посвящена исследованию влияния покрытия на торце пластины в виде светоотражающей пленки на распространение и затухание краевых волн.

Актуальность темы. С развитием микроэлектроники и других областей современной технологии возникла необходимость внедрения неразрушающих методов диагностики и контроля различных многослойных листовых материалов и конструкций. В основном указанные методы основаны на поверхностных акустических волнах, которые являются наиболее эффективными и используемыми. Поведение волн Лэмба в пластинах впервые было изучено Рэлеем и Лэмбом. Волны Лэмба являются наиболее значимыми и удобными, поскольку в настоящие времена достаточно изучены теоретически. Впервые приближенное аналитическое решение было получено И.А. Викторовым.

Краевые волны распространяются вдоль свободного края пластины или оболочки и в настоящие времена достаточно изучены с теоретической точки зрения, однако экспериментальных исследований до последнего времени было недостаточно.

Целью данной работы является исследование влияния покрытия на торце пластины на дисперсию и затухание краевых волн в ней.

Задачами выполняемой работы являются:

- 1) изучение теоретического материала, необходимого для моделирования распространения волн в тонкой пластине с учетом внутреннего трения;
- 2) получение дисперсионного уравнения для краевой волны в полубесконечной пластине с покрытием на торце;
- 3) решение нестационарной динамической задачи о действии касательной нагрузки;

4) выполнение численного исследования влияния покрытия на распространение краевой волны, сравнение с экспериментальными данными.

Материалами исследования являются теории обобщенного плоского напряженного состояния и растяжения-сжатия стержней, дисперсионные уравнения краевых волн, а также данные экспериментов на алюминиевой пластине, полученные с помощью лазерной виброметрии.

Научная значимость работы состоит в том, что в ней впервые рассмотрена планарная краевая волна в пластине с вязкоупругим покрытием на торце.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 41 листе машинописного текста, содержит 16 рисунков.

Основное содержание работы

Во введении описывается актуальность поставленной задачи, формулируется цель исследования и ставятся задачи.

Первый раздел посвящен общим сведениям о теории обобщенного плоского напряженного состояния в пластине, которая позволяет свести трехмерную задачу о распространении волн в пластине к двумерной.

Второй раздел состоит из четырёх подразделов. В нем была сформулирована задача о распространении гармонической волны вдоль края полубесконечной пластины, торец которой подкреплен тонким покрытием (см. рисунок 1):

$$\Delta\varphi - \frac{\kappa^2}{c_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{11}|_{x_1=0} = -\rho_a H_a \frac{\partial u_1}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{12}|_{x_1=0} = H_a Y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \rho_a H_a \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

где φ, ψ – волновые потенциалы, u_1, u_2 – перемещения, σ_{ij} – напряжения,

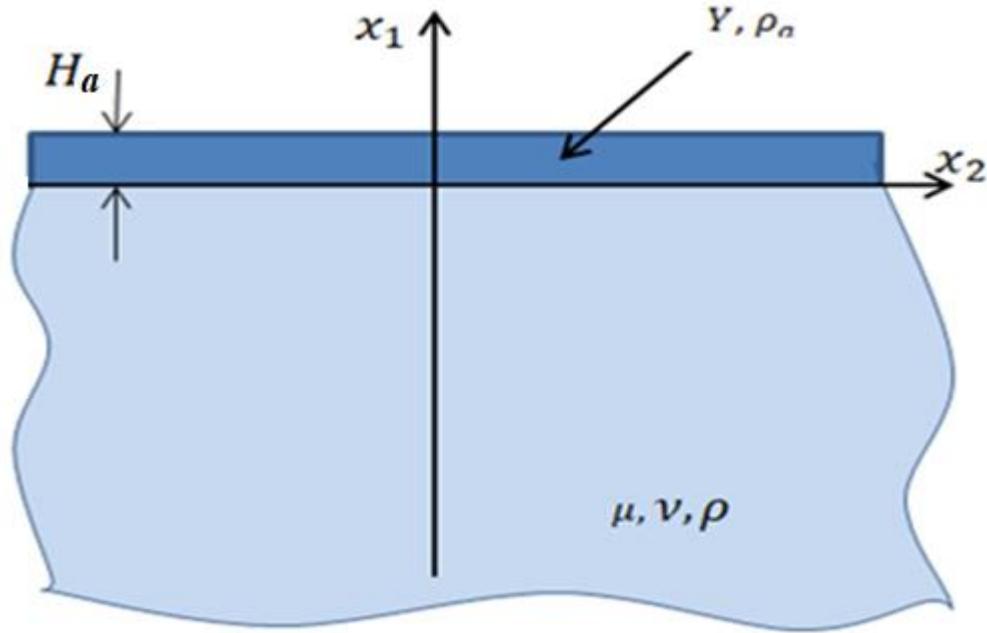


Рисунок 1 – Постановка задачи

Y – модуль Юнга стержня, Па, ρ_a – плотность стержня, кг/м³, H_a – толщина

стержня, м, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорость волны сдвига, $\frac{1-\nu}{2} = \kappa^2$.

На основе построенной модели было получено дисперсионное уравнение для планарной краевой волны

$$\begin{aligned} & \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} \right)^2 - \gamma^2 \lambda_1 \lambda_2 + h \alpha \lambda_1 \frac{\omega^4}{2c_2^4} \\ & - h \frac{\omega^2}{2c_2^2} \left(\beta \gamma^2 - \alpha \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) [\lambda_2 - 2h \alpha (\gamma^2 - \lambda_1 \lambda_2)] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку покрытие является тонким, его влияние на скорость волны невелико, поэтому за начальное приближение при численном решении уравнения (2) можно взять скорость волны в пластине без покрытия. Расчеты дисперсионных кривых выполнены с помощью программного комплекса

Mathcad. На рисунке 2 изображены графики зависимости между угловой частотой и фазовой скоростью при различных значениях параметров относительной плотности и относительной жесткости покрытия.

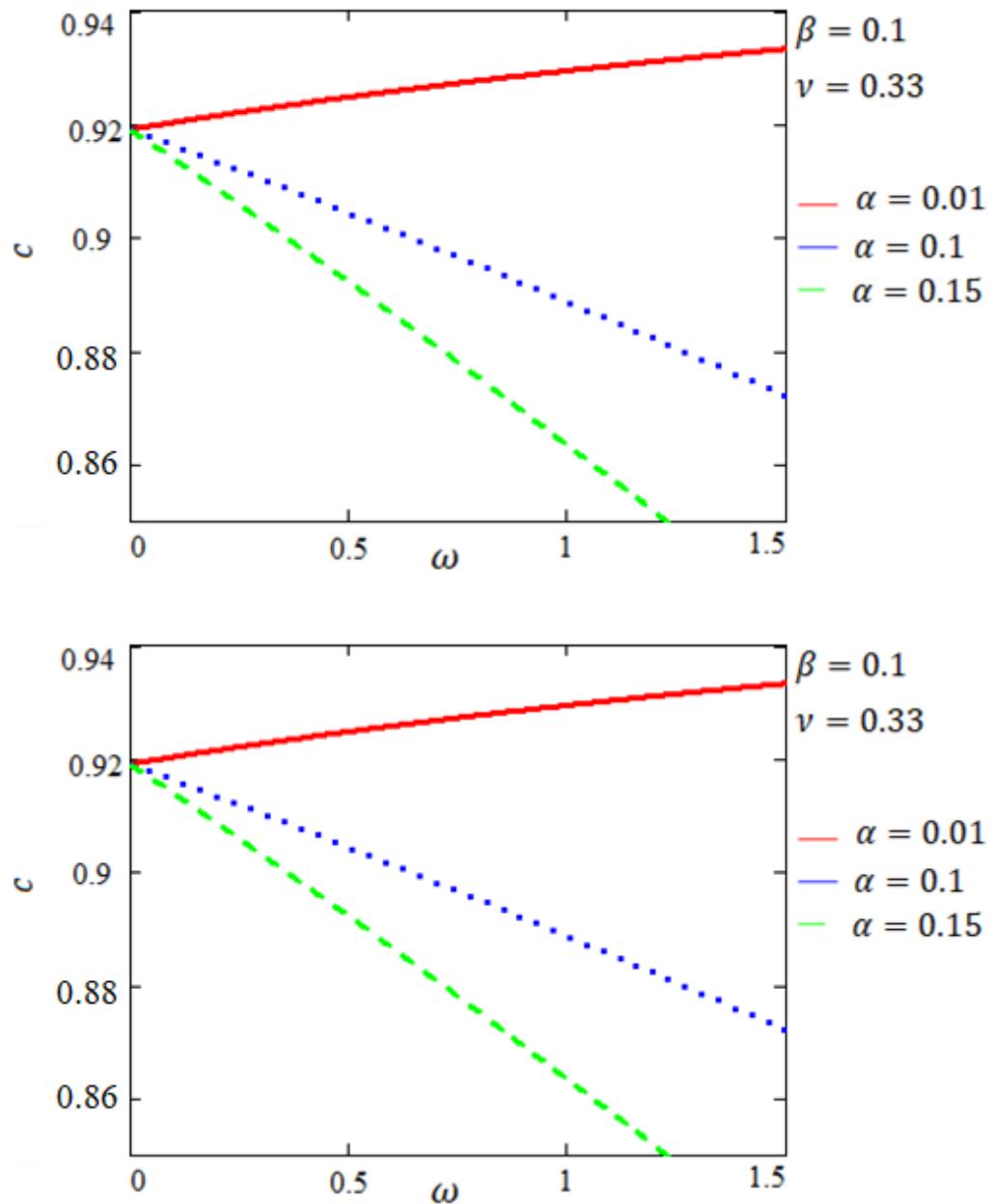


Рисунок 2 – Графики зависимости между угловой частотой и фазовой скоростью при различных значениях параметров покрытия

Анализируя графики, можно сделать вывод, что изменение скорости волны с ростом частоты определяется соотношением параметров

относительной плотности и относительной жесткости. Увеличение относительной плотности при постоянной относительной жесткости уменьшает скорость волны, пока при некотором соотношении параметров возрастание не сменяется затуханием. Напротив, увеличение относительной жесткости при постоянной относительной плотности увеличивает скорость волны.

Третий раздел состоит из трех подразделов. В нем представлена информация о свойствах преобразований Лапласа и Фурье. Так же в этом разделе рассматривается задача о возбуждении нестационарных волн касательной нагрузкой, приложенной на торце. Такая нагрузка моделирует действие пьезоупругого актуатора.

В п.3.2 рассмотрена нестационарная краевая задача без учета вязкоупругих свойств покрытия:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{\kappa^2}{c_2^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta\psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= 0, \\ \sigma_{11}|_{x_1=0} = -\rho_a H_a \frac{\partial u_1}{\partial t^2}, \\ \sigma_{12}|_{x_1=0} = H_a Y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \rho_a H_a \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + S_0(x_2, t) \end{aligned} \tag{3}$$

Применение к уравнениям (3) преобразования Лапласа с параметром $p = i\omega$, а затем преобразование Фурье приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi^{LF}}{dx_1^2} - \varphi^{LF} \left(\gamma^2 - \frac{\kappa^2\omega^2}{c_2^2} \right) &= 0, \\ \frac{d^2\psi^{LF}}{dx_1^2} - \psi^{LF} \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

с граничными условиями при $x_1 = 0$

$$\varphi^{LF} \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} \right) - i\gamma \frac{\partial \psi^{LF}}{\partial x_1} = \frac{\omega^2 h\alpha}{c_2^2} u_1^{LF},$$

$$\psi^{LF} \left(\frac{\omega^2}{2c_2^2} - \gamma^2 \right) - i\gamma \frac{\partial \varphi^{LF}}{\partial x_1} = hu_2^{LF} \left(\frac{\alpha\omega^2}{c_2^2} - \gamma^2 \beta \right) + \frac{S_0^{LF}(\gamma, \omega)}{2\mu}.$$

Решение в изображениях для скорости нормального перемещения на торце имеет вид

$$V^{LF} = \frac{-\gamma\omega S_0^{LF}(\omega, \gamma)(\lambda_1 B_1 - A_1)}{2\mu\Delta_1}, \quad (6)$$

где $A_1 = \gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2}(1 + 2\lambda_1 h\alpha)$, $B_1 = \lambda_2 - \frac{\omega^2 h\alpha}{c_2^2}$, $\Delta_1 = \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} \right)^2 - \gamma^2 \lambda_1 \lambda_2 + h\alpha \lambda_1 \frac{\omega^4}{2c_2^4} - h \frac{\omega^2}{2c_2^2} \left(\beta \gamma^2 - \alpha \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) [\lambda_2 - 2h\alpha(\gamma^2 - \lambda_1 \lambda_2)]$.

Оставив один вычет, соответствующий волне распространяющейся в положительном направлении и используя формулу обращения Фурье получаем

$$V(x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V^F e^{-i\gamma x_2} d\gamma. \quad (6)$$

При использовании нагрузки в форме тонального импульса интеграл в (6) хорошо сходится и может быть вычислен путем численного интегрирования.

В п.3.3 рассмотрена нестационарная краевая задача с учетом вязкоупругих свойств покрытия. Для учёта внутреннего трения в покрытии примем, что материал описывается законом линейной вязкоупругости

$$\sigma_a + \tau_\varepsilon \dot{\sigma}_a = Y_\infty \varepsilon_a + \tau_\varepsilon Y_0 \dot{\varepsilon}_a,$$

где τ_ε – время релаксации напряжения при постоянной деформации, а Y_0 и Y_∞ – значения отношения напряжения к деформации (модуль Юнга), которые достигаются до и после окончания процессов релаксации.

Задача о распространении краевых волн в пластине с учетом внутреннего трения в покрытии запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\varphi^{LF}}{dx_1^2} - \varphi^{LF} \left(\gamma^2 - \frac{\kappa^2 \omega^2}{c_2^2} \right) = 0, \\
& \frac{d^2\psi^{LF}}{dx_1^2} - \psi^{LF} \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) = 0, \\
& \varphi^{LF} \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{2c_2^2} \right) - i\gamma \frac{\partial \psi^{LF}}{\partial x_1} = \frac{\omega^2 u_1^{LF}}{c_2^2} \alpha_1, \\
& \psi^{LF} \left(\frac{\omega^2}{2c_2^2} - \gamma^2 \right) - i\gamma \frac{\partial \varphi^{LF}}{\partial x_1} = h u_2^{LF} \left(\frac{\omega^2 \alpha}{c_2^2} - \gamma^2 \beta(\omega) \right) + \frac{S_0^{LF}(\omega, \gamma)}{2\mu},
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\alpha = \frac{H_a \rho_a}{2h\rho},$$

$$\beta(\omega) = \frac{H_a Y^L(\omega)}{2\mu h},$$

$$\alpha_1 = \left(\alpha - \frac{i\eta c_2^2}{2h\mu\omega} \right).$$

Четвертый раздел состоит из двух подразделов. В первом описывается эксперимент по наблюдению краевых волн в пластине. Во втором сравнивается численное решение с экспериментальными данными.

Аналитическое преобразование Фурье для функции заданной касательной нагрузки имеет вид взятый из статьи М. В. Вильде, М. В. Голуба, А. А. Ерёмина (J. Sound Vib. 2019. V. 441. P. 26-49):

$$\begin{aligned}
S_0^{LF}(\omega, \gamma) &= \mu I_0 p^L \cdot \frac{H_{pl} \alpha_a}{\text{ch}(\alpha l_a)} \left[\frac{\text{sh}(\alpha_a + i\gamma) l_a}{\alpha_a + i\gamma} - \frac{\text{sh}(\alpha_a - i\gamma) l_a}{\alpha_a - i\gamma} - \right], \\
I_0 &= \frac{Y_a d_{31} V_0}{\mu H_{pl}},
\end{aligned}$$

где l_a – длина актуатора, м;

H_{pl} – толщина пластины, м;

Y_a – модуль Юнга актуатора в продольном направлении, Па;

d_{31} – пьезоэлектрическая постоянная, Кл/Н;

V_0 – коэффициент усиления по напряжению, В;

$$\alpha_a = \frac{3,46}{H_{pl}};$$

Здесь p^L – преобразованная по Лапласу функция тонального импульса

$$p(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 t) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi f_0 t}{N_c}\right) \right), 0 < t < \frac{N_c}{f_0},$$

где N_c – количество циклов;

f_0 – частота приложенной нагрузки, Гц;

$$\omega_0 = \frac{f_0 H_a}{c_2}.$$

На рисунках 3 и 4 изображены графики зависимости действительной и мнимой частей волнового числа от частоты, рассчитанные по построенной модели (красная линия) и полученные в эксперименте (синий маркер).

Как видно из рисунка 4, при подходящем выборе параметров приближенная модель, построенная в данной работе, позволяет описать коэффициент затухания волны, полученный из экспериментов. Поведение действительной части волнового числа при этом изменяется мало (см. рис. 3) и тоже совпадает с экспериментальными данными.

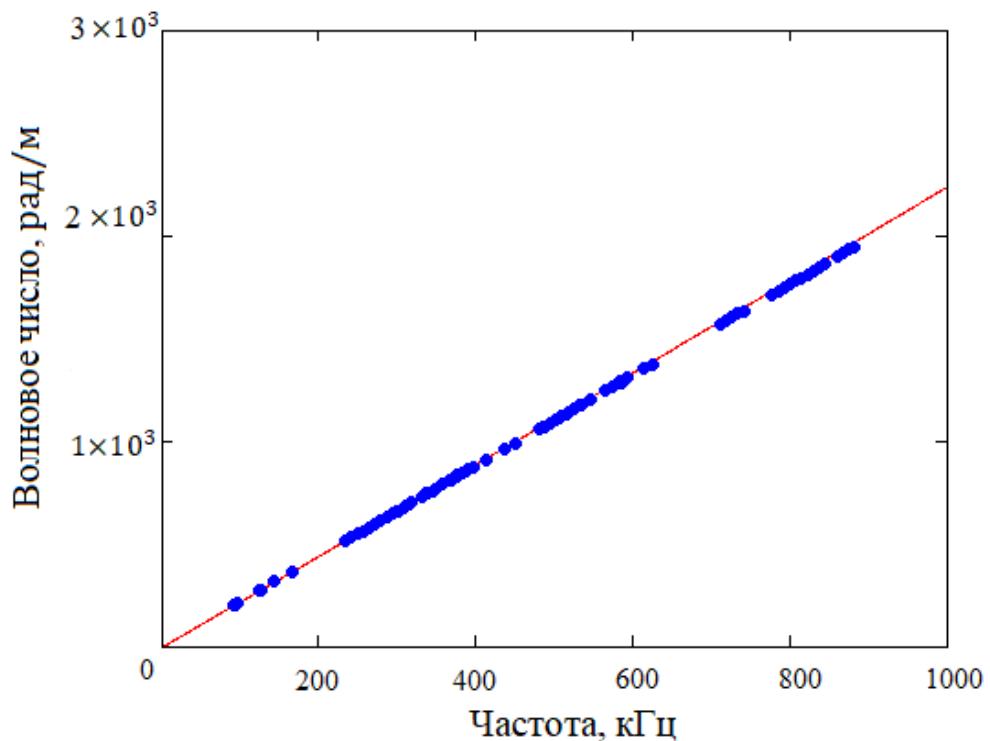


Рисунок 3 – Сравнение дисперсионных кривых

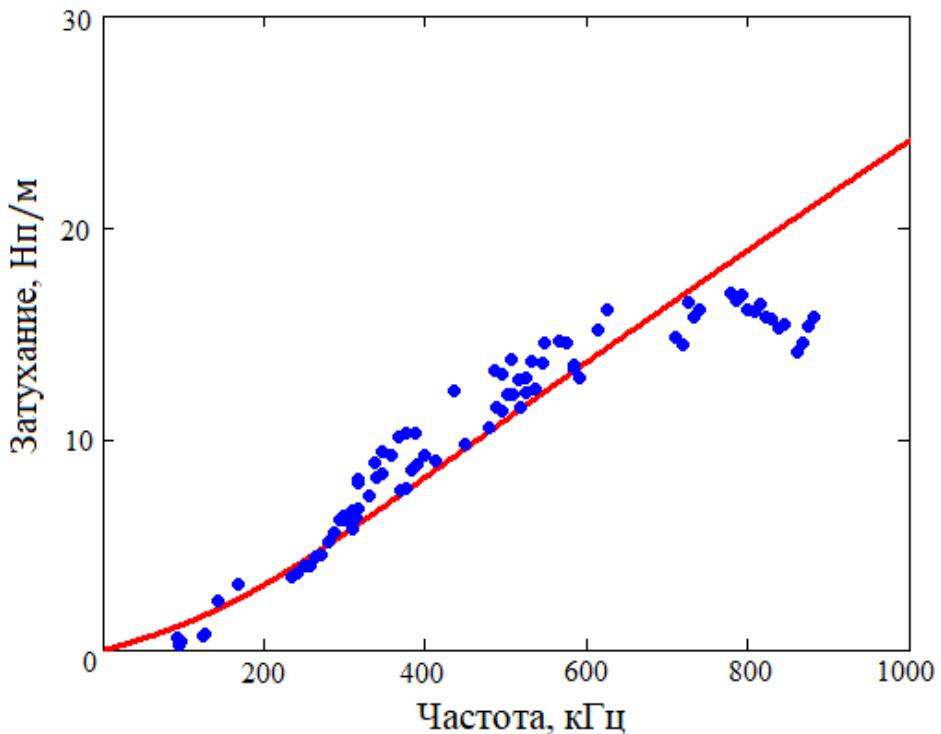


Рисунок 4 – Зависимость затухания от частоты

Далее было произведено сравнение рассчитанной и измеренной в эксперименте скорости $u = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{x_1=0}$. Хорошее согласование теории и эксперимента наблюдается, если в теоретической модели принимается во внимание демпфирование в поперечном направлении. Заметим также, что построенная модель верно предсказывает степень увеличения затухания при возрастании частоты воздействия от 300 до 500 кГц.

Заключение

В данной работе построена простейшая модель, описывающая влияние покрытия на торце на распространение краевой волны. Получено и численно решено дисперсионное уравнение для краевой волны в пластине с покрытием на торце. Построены графики, позволяющие сравнить изменение дисперсионной кривой при различных значениях относительной плотности и относительной жесткости материала. С использованием интегральных

преобразований Лапласа и Фурье решена задача о действии касательной нагрузки, приложенной на торце пластины. При этом рассмотрены случаи идеально упругого покрытия и покрытия, обладающего вязкоупругими свойствами. Приведены результаты численных расчетов, иллюстрирующие влияние покрытия на профиль и затухание краевой волны.

Сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными показывает, что при подходящем выборе параметров удается описать экспериментально полученную зависимость коэффициента затухания краевой волны от частоты. Сравнение результатов для волнового поля, измеренного лазерным виброметром и вычисленного по полученной в работе формуле, показывает, что построенная в данной работе модель верно описывает затухание волны со временем. Практическая значимость результатов работы определяется тем, что она позволяет оценить степень затухания волны при заданной частоте нагрузки.

Автор выражает благодарность сотрудникам Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета Голубу М. В. и Еремину А. А. за предоставленные экспериментальные данные.