МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Множества значений функционалов на классах однолистных функций

Автореферат магистерской работы

студента 2 курса 227 группы

направления ***02.04.01 Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Скворцова Артема Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________________ А. М. Захаров
подпись, дата

и.о. зав. кафедрой
к.ф.-м.н. ____________________ А. М. Захаров
подпись, дата

Саратов 2021

Введение. Математикам давно известно уравнение Лёвнера. Оно широко применялось в единичном круге, а также для отображения в полуплоскости.

Данная работа посвящена теории плоских процессов роста Левнера. Сосредоточимся на одной стороне теории, а именно на хордовом уравнении Левнера. Оригинальная теория Левнера - это вариант, в настоящее время, радиального уравнения Левнера, которое он ввел для решения случая n = 3 Гипотезы Бибербаха в 1923 году.

Работа имеет 4 основных раздела и приложение. В первых двух главах представлены основные результаты, которые были получены классиками комплексного анализа и опубликованы в книге Игоря Александровича Александрова "Параметрические продолжения в теории однолистных функций"[1]. В ней работа проводилась с отображением верхней полуплоскости на полуплоскость с разрезом.

Сейчас специфика несколько иная: речь идет об отображении полуплоскости с разрезом на полуплоскость и в уравнение Лёвнера внесена 2, как коэффициент. Именно этому и посвящены 3 и 4 главы магистерской работы.

Пусть $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$- ведущая функция хордового процесса Левнера. В работе Zhang, H., Zinsmeister, M. [2] найдены новые условия на λ, из которых следует, что процесс порождается простой кривой. Этот результат улучшает первый результат Линда, Маршалла и Роуда и, в частности, дает новые результаты о случае $\lambda(t) = cW_b(t)$, где W_b является функцией Вейерштрасса - Гёльдера $-1/2$.

В приложении представим примеры построения плоскости, которая описана в главе 2, как оценка коэффициентов разложения функции.

Нами были поставлены следующие задачи:

1. Изучить историю вопроса и ознакомиться с результатами, опубликованными в книге "Параметрические продолжения в теории однолистных функций"И.А. Александрова.

2. Проанализировать полученные результаты.

3. Рассмотреть вопросы, вызывающие интерес математиков в настоящее время, с точки зрения уравнения Лёвнера для полуплоскости.

[1] Александров, И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций - Москва : Наука, 1976. - 343 с.

[2] Zhang, H., Zinsmeister, M. Local analysis of Loewner equation - 2019

Основное содержание работы. Классом H называется множество всех голоморфных однолистных в Π_{ς}^{+} функций $w = f(\varsigma)$, принимающих значения в Π_{ς}^{+}, и нормированных условием $\lim\limits_{\varsigma\longrightarrow\infty}(f(\varsigma)-\varsigma)=0, \varsigma\in\Pi_{\varsigma}^{+}$.

Обозначим через $\widetilde{H}$ совокупность всех функций $f(\varsigma)\in H$, отображающих Π_{ς}^{+} на (односвязные) области без внешних в Π_{w}^{+} точек, получающиеся из Π_{w}^{+} проведением конечного числа жордановых разрезов (образующих попарно несвязные деревья, каждое из которых имеет один корень на оси $Imw = 0$).

Теорема 1. *Пусть $f(z)\in\widetilde{H}$. Тогда существуют $t_0\in\widetilde{H}$ и вещественная функция $u : u = u(t)$, непрерывная везде на $[0, t_0]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, такие, что $f(z) = \Phi(z, t_0)$.*

Здесь под $\omega = \Phi(z, t_0)$ понимается интеграл уравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{u-\omega}, \tag{1}$$

удовлетворяющий начальному условию $\omega|_{t=0} = z, z \in \Pi_{z}^{+}$.

Условимся впредь функции $u(t)$ называть допустимыми на $[0, t_0]$. Классом H_L называется совокупность всехфункций $f(z)\in H$, допускающих при достаточно больших $R, R > 0$, в полуокрестности
$K_R^{+} = \{z : |z| > R, z\in\Pi_{z}^{+}\}$ точки $z = \infty$ со разложение в ряд

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \tag{2}$$

Через H_L^{r} обозначим подкласс всех функций из H_L с вещественными коэффициентами в разложении (2).

Теорема 2. *Пусть $t_0, t_0 > 0$, — произвольное фиксированное число и $u = u(t)$ — вещественная кусочно непрерывная функция на $[0, t_0]$ без точек разрыва второго рода. Тогда решение уравнения (1) с начальным условием*

$\omega|_{t_0} = z$ *представляет функцию* $\omega = \Phi(z,t)$, *которая при каждом* $t \in (0, t_0]$ *как функция* z, $z \in \Pi_z^+$, *принадлежит классу* H_L^r. [3]

Далее изучим множества значений коэффициентов разложения функций $f(z) = z + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$ классов H_L, H_L^r. Здесь будет выяснена особая роль коэффициента c_1, функции $f(z)$, оказывающего своей величиной регулирующее влияние на изменение других коэффициентов этой функции, а также на изменение некоторых простейших функционалов, характеризующих поведение функции $f(z)$ внутри ее области определения. В зависимости от c_1. (иногда в зависимости от c_1, c_2) для других коэффициентов указываются множества их значений, либо мажоранты, либо достаточно емкие миноранты этих множеств.

Қлассом H_1 назовем подкласс класса H всех функций $f(z)$, для которых при $z \longrightarrow \infty$, $z \in \Pi_z^+$, существует конечный предел

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} z[f(z) - z] = \{f\}_1$$

Теорема 3. На классе $H_L^r(c_1), c_1 < 0$ функций

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots \tag{3}$$

имеют место оценки

$$c_3 \leq \frac{c_2^2}{c_1} - \frac{1}{2} c_1^2, \tag{4}$$

$$c_5 \leq \frac{c_2^4}{c_1^3} - \frac{1}{2} c_1^3 - 2,82 c_2^2, \tag{5}$$

[3] Селляхова, Т.Н., Соболев, В.В. О взаимном изменении величин $\log f'(z)$ и $f(z)$ для одного класса функций, однолистных в полуплоскости - Тр. зонального объединения математиких ка-федр désинститутов Сибири, Красноярск, 1, 1972, 176-192 с.

Оценка (4) точная, равенство в ней реализуется функциями

$$f_0(z) = u_0 + [(z - u_0)^2 + 2c_1]^{1\backslash 2} \in H_L^r(c_1), \quad u_0 = cost, Imu_0 = 0. \tag{6}$$

Следующая часть работы посвящена основным уравнениям Левнера. Пусть $\mathbb{H}$ - верхняя полуплоскость, $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in C; y > 0\}$.

Предположим, что $\gamma : [0, T] \to \bar{\mathbb{H}}$ непрерывно и инъективно с $\gamma(t) \in \mathbb{H}, t \in (0, T], \gamma(0) = 0$. Запишем $K_t = \gamma[0, t]$ и $H_t = \mathbb{H} \backslash K_t$. Это растущее замкнутое множество K_t называется оболочкой процесса Левнера. Из теоремы Риманова отображения, существует единственное конформное отображение $g_t : H_t \to \mathbb{H}$, удовлетворяющее следующему разложению в ∞:

$$g_t(z) = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{7}$$

с $c(t) \in R_+$, и g_t можно расширить по принципу отражения Шварца на $\mathbb{C} \backslash K_t \cup s(K_t)$ голоморфно, где $s(z) = \bar{z}$.

Поскольку функция $t \mapsto c(t)$, называемая емкостью, является непрерывной и возрастает от 0 до ∞, мы можем параметризовать $\gamma(t)$ так, чтобы $c(t) = 2t$. Можно доказать, что предел $\lambda(t) = \lim\limits_{z \in \mathbb{H}_t, z \to \gamma(t)} g_t(z)$ существует и лежит в $\mathbb{R}$. Более того $t \mapsto \lambda(t)$ непрерывно, а $t \to g_t(z)$ удовлетворяет хордовому уравнению Левнера:

$$\dot{g}_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \lambda(t)}, g_0(z) = z, z \in \mathbb{H}. \tag{8}$$

Функция λ называется управляющей функцией процесса. $\lambda(0) = 0$, поскольку g_0 - тождественное отображение.

Рассмотрим уравнение Левнера с управляющей функцией cW_b, где c - положительная константа, а W_b - функция Вейерштрасса

$$W_b(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(b^n t)}{\sqrt{b^n}} \tag{9}$$

Локальное поведение функции Вейерштрасса изучалось давно. Эта функция имеет некоторые общие свойства с броуновским движением. Уже доказано, что

$$||W_b||_{1/2} \leq \frac{b}{\sqrt{b-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{b}}} = C(b) \sim \sqrt{b}, b \to +\infty \tag{10}$$

Если $c < 4/C(b) \sim 4/\sqrt{b}$, то уравнение Левнера, управляемое cW_b, генерируется квазиконформной кривой, в частности простой кривой.

Теорема 4. $\forall l_0 > 1, \exists C > 0$, если $c < C$, то уравнение Левнера с управляющей функцией cW_b генерируется квазиконформной кривой, когда $b > l_0$.

Заключение. В данной работе рассмотрены вопросы и результаты исследований, опубикованых в книге Игоря Александровича Александрова "Параметрические продолжения в теории однолистных функций". А так же изчены вопросы, которые вызывают интерес математиков в настоящее время, с точки зрения уравенения Лёвнера для полуплоскости.

В приложении А представлен пример построения плоскости, которая описана как оценка коэффициентов разложения функции. Все построения реализованы с помощью кроссплатформенной динамическойматематической программы для всех уровней образования - GeoGebra 3D.