МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Алгебры Ли и квантовая интегрируемость

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ИВАНОВА ЕВГЕНИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ______ А.Н. СЕРГЕЕВ
должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ______ С.В. ГАЛАЕВ
должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Саратов 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является исследование интегрируемости дифференциального оператора следующего вида:

$$L_2 = \partial^2 - \frac{k(k+1)}{x^2}$$

Впервые оператор L_2 появился в работах итальянского математика Калоджеро [1] в 70 - х годах 20 века, при рассмотрении взаимодействия конечного числа частиц на прямой по закону обратных квадратов. Его исследование нашло продолжение в работах Мозера [2] и Сазерленда [3], [4]. В дальнейшем, эта задача стала известной как задачей Колоджеро-Мозра-Сазерленда или сокращенно задача КМС. Затем, М. Ольшанецким и А. Переломовым [5] было дано обобщение этого оператора на произвольную систему корней полупростой алгебры Ли. Оказалось, что операторы такого вида обладают многими замечательными свойствами, наиболее важным из которых является их интегрируемость. То есть оператор L_2 может быть включен в алгебраически независимое семейство попарно коммутирующих дифференциальных операторов $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Основным результатом работы является доказательство интегрируемости оператора L_2. Впервые подробное исследование таких операторов и гипотеза об их интегрируемости была высказана в работах Опдама и Хекмана [7], [8], [9], [10]. Принципиально новый шаг в теории этих операторов был сделан Ч. Данклом в 1989 году, где он ввел операторы носящие его имя [6]. Открытие этих операторов позволило не только существенно упростить доказательство основных свойств этих операторов, но и дать начало новым направлениям в теории этих операторов.

Современные исследования задачи КМС и их связь с оператором Данкла на бесконечности широко представлены в работах А. Н. Сергеева в соавторстве с А. П. Веселовым [11], [12], [13], [14].

В работе приводятся необходимые сведения из общей теории а также исследуется интегрируемость оператора L_2 в случае одной переменных (общий случай можно свести к этому) методами теории алгебр Ли. Для этого проверяются коммутационные соотношения алгебры Ли $sl(2)$ между некоторыми операторами (включая L_2). Затем теория представлений этой алгебры используется для доказательства интегрируемости.

Структура работы следующая. В первом разделе представлено введение в проблему интегрируемости операторов на примере задачи классической механики. Во втором разделе представлены некоторые сведения из линейной алгебры. В третьем разделе приведены основные сведения из теории Алгебры Ли и её представлений. Четвертый раздел посвящен краткому обзору методов исследований интегрируемости, в смысле Лиувилля. Пятый раздел содержит самостоятельную часть работы, доказанны ряд лемм со вспомогательными формулами и финальная теорема, доказывающая интегрируемость оператора L_2. Данная теорема ранее была известна, здесь рассматривается новое доказательство с использованием теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Для достижения цели ставим следующие задачи:

1. изучить основные положения алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$;
2. изучить основные положения теории представлений;
3. исследовать интегрируемость оператора L_2;

1 Основное содержание работы

Объектом исследования выпускной работы является оператор задачи Калоджеро-Мозера-Сазерленда

$$L_2 = \partial^2 - \frac{k(k+1)}{x^2}$$

Основная часть работы носит реферативный характер. Первые четыре раздела посвящены основной теории, которая применяется для достижения цели. Основным инструментом исследования интегрируемости оператора является теория представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, которой посвящен третий раздел.

Определение 1.1 (Алгебра Ли). *Рассмотрим операцию $[x, y] = xy - yx$. Векторное пространство L над полем $\boldsymbol{F}$ с операцией $L \times L \to L$, обозначаемой $(x, y) \mapsto [x, y]$ и называемой скобкой или коммутатором элементов x и y, называется алгеброй Ли над полем $\boldsymbol{F}$, если выполняются следующие аксиомы:*

1. *операция коммутирования билинейна;*
2. $[x, x] = 0 \ \forall x \in L$;
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ (x, y, z \in L)$

Последняя аксиома называется тождеством Якоби.

Определение 1.2 (Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$). *Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ называется трехмерная алгебра Ли с таблицей умножения*

$$[X, Y] = H, [H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y.$$

Также важными понятия, которые используются при получении финального результата являются понятия старшего и младшего вектора модуля алгебры Ли.

Определение 1.3 (Модуль алгебры). *Пусть L — некоторая алгебра Ли. Векторное пространство V с дополнительной операцией $L \times V \to V$ (обозначаемой $(x, v) \mapsto x \cdot v$ или просто xv), называется L-модулем, если выполняются следующие условия:*

1. $(ax + by)v = a(x \cdot v) + b(y \cdot v)$,

2. $x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w)$,

3. $[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v$ $(x, y \in L; v, w \in V; a, b \in \boldsymbol{F})$

Определение 1.4 (Старший вектор)**.** *Пусть L-алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ и пусть V-произвольный L-модуль. Тогда вектор $v \in V$ называется старшим вектором модуля, если выполняются следующие условия:*

$$Hv = \lambda v,$$
$$Xv = 0.$$

λ называется весом старшего вектора.

Определение 1.5 (Младший вектор)**.** *Пусть L-алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ и пусть V-произвольный L-модуль. Тогда вектор $v \in V$ называется младшим вектором модуля, если выполняются следующие условия:*

$$Hv = \lambda v,$$
$$Yv = 0.$$

λ называется весом младшего вектора.

Пятый раздел содержит основной результат работы. Вводятся специальные операторы.

Определение 1.6. *Введем следующие операторы из алгебры $\mathbb{C}[\partial, x, x^{-1}]$*

$$X = \frac{1}{2}x^2, \ Y = -\frac{1}{2}(\partial^2 - \frac{k(k+1)}{x^2}), \ \ H = x\partial + \frac{1}{2}$$

Проверяется, что эти операторы образуют алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Лемма 1.7. *Операторы X, Y, H, удовлетворяют соотношениям алгебры $\mathfrak{sl}(2)$*

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y$$

Доказываются леммы, которые непосредственно используются для достижения цели.

Лемма 1.8. *Справедливы следующие равенства*

$$ad_Y^{2m+2}(x^{2m+1}) = (2m+1)^2(2m-1)^2 \dots 1^2$$

$$(k+m+1)(m-k)(k+m)(m-1-k)\dots(k+1)(-k)x^{-2m-3}$$

где $m \geq 0$.

Лемма 1.9. *Для* $m \geq 0$ *справедливо равенство* $ad_Y^{2m+1}(x^{2m}) = 0$.

Результатом работы является доказательство интегрируемости оператора L_2 с использованием теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Теорема 1.10. *Пусть* $L_2 = \partial^2 - \frac{k(k+1)}{x^2}$, *тогда в алгебре* $\mathbb{C}[x.x^{-1}, \partial]$ *существует дифференциальный оператор коммутирующий с* L_2 *и отличный от* L_2^N, $N = 1, 2, \dots$, *если и только если* k *- целое.*

В дополнении, доказательство дает нам способ построения таких операторов:

$$L' = ad_Y^{2m+1}(x^{2m+1}),$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена теория алгебры Ли, в частности алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Представлены основные теоремы теории представлений алгебры Ли. Представлен один из классических методов исследования интегрируемости, в смысле Лиувилля, гамильтоновой системы – метод пар Лакса. Приведенно новое доказательство, опирающиеся на теорию представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, интегрируемости оператора L_2 Колоджеро-Мозера-Сазерленда. В результате полученна явная формула для построения системы коммутирующих операторов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Calogero, F. Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials // Journal of Mathematical Physics / F. Calogero.– 1971. – V. 12, № 3. – P. 419-436.

2 Moser, J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations // Advances in mathematics / J. Moser.– 1975. - V. 16.– P. 235-258.

3 Sutherland, B. Exact results for a quantum many-body problem in one dimension // Physical Review A / B. Sutherland. – 1971. – V. 4, № 5.– P. 2019.

4 Sutherland, B. Exact results for a quantum many-body problem in one dimension II // Physical Review A / B. Sutherland. – 1972. – V. 5, № 3.– P. 1372.

5 Olshanetsky, M. A., Perelomov, A. M. Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras // Inventiones mathematicae / M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov. – 1976. – V. 37, № 2. – P. 93-108.

6 Dunkl, C. F. Differential-difference operators associated to reflection groups // Transactions of the American Mathematical Society / C. F. Dunkl. – 1989. – V. 311, № 1. – P. 167-183.

7 Heckman, G. J., Opdam, E. M. Root systems and hypergeometric functions I // Compositio Mathematica / G. J. Heckman, E. M. Opdam. – 1987. – V. 64, № 3. – P. 329-352.

8 Heckman, G. J. Root systems and hypergeometric functions. II // Compositio Mathematica / G. J. Heckman. – 1987. – V. 64, № 3.– P. 353-373.

9 Heckman, G. J. An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam // Inventiones mathematicae. / G. J. Heckman.– 1991.– V. 103, №. 1.– P. 341-350.

10 Heckman, G. J. A Remark on the Dunkl Differential—Difference Operators // Harmonic analysis on reductive groups / G. J. Heckman. - Birkhauser Basel. - 1991. - V. 101, №. 1. – P. 181-191.

11 Sergeev, A. N., Veselov, A. P. Quantum Calogero–Moser systems: a view from infinity // Sixteenth International Congress on Mathematical Physics / A. N. Sergeev, A. P. Veselov. – 2010. – P. 333-337.

12 Sergeev, A. N., Veselov, A. P. Calogero-Moser operators in infinite dimension // arXiv preprint arXiv:0910.1984. / A. N. Sergeev, A. P. Veselov. – 2009.

13 Sergeev, A. N., Veselov, A. P. Deformed quantum Calogero-Moser problems and Lie superalgebras //Communications in mathematical physics / A. N. Sergeev, A. P. Veselov.– 2004. – V. 245, №. 2. – P. 249-278.

14 Sergeev, A. N., Veselov, A. P. Dunkl Operators at Infinity and Calogero–Moser Systems // International Mathematics Research Notices / A. N. Sergeev, A. P. Veselov. – 2015. – V. 2015, №. 21. – P. 10959–10986.