МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Простейшая задача оптимального управления для потребителя

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 - Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Гришковой Валерии Германовны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________ М.А. Осипцев
подпись, дата

Зав. кафедрой
зав. каф, к.ф.-м.н., доцент ____________ А.М. Захаров
подпись, дата

Саратов 2021

Я, Гришкова Валерия Германовна, студентка 421 группы, проходила преддипломную практику на кафедре математического анализа в период с 16 мая 2021 года по 3 июня 2021 года.

Тема практики - "Простейшая задача оптимального управления для потребителя".

Цель практики - завершение конечной стадии работ по решению задач, поставленных научным руководителем бакалаврской работы, и оформление автореферата.

В работе вводятся основные понятия, связанные с оптимальным управлением. Рассматривается принцип максимума в задачах без ограничений, а также при наличии фазовых ограничений. Приводятся примеры решения задач по данной теме.

Объем бакалаврской работы составляет 48 страниц с учетом приложений.

Введение

Математическая теория оптимального управления является одной из наиболее сложных для освоения. Это прежде всего связано со смысловыми отличиями изучаемых в данном разделе задач оптимального управления от задач конечномерной оптимизации, и, как следствие, с существенным усложнением используемых в них условий оптимальности. Принцип максимума был высказан в качестве гипотезы Л. С. Понтрягиным. Это явилось основным стимулом и исходным пунктом возникновения теории оптимальных процессов. Поэтому указанная теорема пользуется во всем мире заслуженной известностью под названием *принцип максимума Понтрягина*. В связи с этим представляется нужным дать наглядные примеры применения данных условий оптимальности к решению задач всевозможных типов.

Целью работы является изучение управляемых объектов, отыскание наилучших способов управления ими, а также рассмотрение задач оптимального управления для потребителя.

При исследовании данной темы поставим следующие задачи:

1. Ознакомиться с основными понятиями об управляемых объектах.
2. Подробно рассмотреть принцип максимума и пример его применения.
3. Изучить задачу оптимального управления для потребителя.

Основное содержание работы. Работа состоит из 4 глав.

Основные понятия об управляемых объектах.

Определение 1. Задача оптимального управление — это задача проектирования системы, обеспечивающей для заданного объекта управления или процесса закон управления или управляющую последовательность воздействий, обеспечивающих максимум или минимум заданной совокупности критериев качества системы.

Определение 2. *Фазовыми координатами объекта* называются n чисел $x^1, x^2, ..., x^n$, которые задают *состояние* объекта (в каждый момент времени).

Определение 3. Величины $x^1, x^2, ..., x^n$, удобно рассматривать как координаты некоторого вектора (или точки) $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ в $n-$мерном пространстве с координатами $x^1, x^2, ..., x^n$. Эту точку называют *фазовым состоянием* объекта, а $n-$мерное пространство, в котором в виде точек изображается фазовые состояния, называется *фазовым пространством* рассматриваемого объекта.

Определение 4. Чтобы полностью задать движение объекта, надо задать его фазовое состояние $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ в начальный момент времени t_0 и выбрать векторную функцию $u(t)^1, u(t)^2, ..., u(t)^r$ (для $t > t_0$), т.е.

$$u(t) = (u(t)^1, u(t)^2, ..., u(t)^r).$$

Эту функцию $u(t)$ будем называть *управлением.*

Задача управления.

Рассмотрим следующую задачу, связанную с управляемыми объектами. В начальный момент времени t_0 объект находится в фазовом состоянии x_0; требуется выбрать такое управление $u(t)$, которое переведет объект в заранее заданное конечное фазовое состояние x_1 (отличное от x_0 рис. 1).

При этом начальное состояние x_0 может быть заранее неизвестно. Рассмотрим один из наиболее типичных примеров. Объект должен устойчиво работать в некотором режиме (т.е. находиться в некотором фазовом состоянии x_1). В результате тех или иных причин (например, под воздействием неожиданного толчка) объект может выйти из рабочего состояния x_1 и оказаться в некотором другом состоянии x_0. При этом точка x_0, в которую может

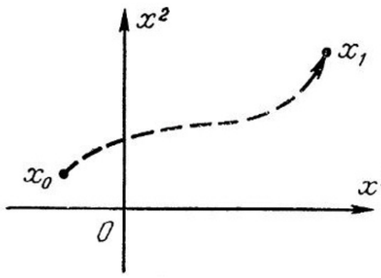

Рис. 1

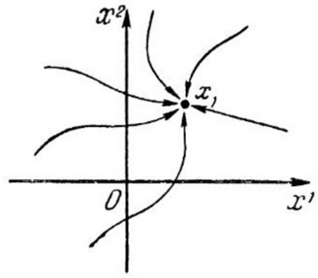

Рис. 2

попасть объект, заранее неизвестна, и мы должны уметь так управлять объектом, чтобы из любой точки x_0(или хотя бы из точек x_0; достаточно близких к x_1) вернуть его в рабочее состояние x_1 (рис. 2).

Обычно требуется, чтобы *переходный* процесс (т.е процесс перехода из начального фазового состояния x_0 в предписанное конечное состояние x_1, рис 1) был в определенном смысле "наилучшим напрмер, чтобы время перехода было наименьшим и т.п. Такой "наилучший"переходный процесс называется *оптимальным процессом.*

Процесс, в результате которого объект переходит из точки x_0 в точку x_1 (рис. 1), называется *оптимальным в смысле быстродействия*, если не существует процесса, переводящего объект из x_0 в x_1 за наименьшее время (предполагая $x_0 \neq x_1$).

Принцип максимума

Будем предполагать, что выполнена следующая

Гипотеза 1. Функция $\omega(x)$ имеет при $x \neq x_1$ вторые непрерывные производные $\frac{\partial^2 \omega(x)}{\partial x^i \partial x^j}, i, j = 1, 2, ..., n$, а функции $f^i(x, u)$ - первые непрерывные производные $\frac{\partial f^i(x,u)}{\partial x^j}, i, j = 1, 2, ..., n$.

Ее доказательство мы приведем в ходе дипломной работы. Из данной гипотезы вытекает следующая терема, которая носит название *принцип максимума.*

Теорема 1. Предположим, что для рассматриваемого управляемого объекта, описываемого уравнением (в векторной форме)

$$\dot{x} = f(x, u), u \in U, \tag{A}$$

и предписанного конечного состояния x_1 выполнены гипотезы 1, 2 и 3. Пусть $(u(t), x(t)), t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, - некоторый процесс, переводящий объект из начального состояния x_0 в состояние x_1. Введем в рассмотрение функцию H, зависящую от переменных $x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^r$ и некоторых вспомогательных переменных $\psi_1, ..., \psi_n$:

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i(x, u). \tag{B}$$

С помощью этой функции H запишем следующую систему дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных:

$$\psi_k = -\frac{\partial H(\psi, x(t), u(t))}{\partial x^k}, k = 1, ..., n, \tag{C}$$

где $(u(t), x(t))$ - рассматриваемый процесс (13). Тогда, если процесс $(u(t), x(t)), t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, является оптимальным, то существует такое нетривиальное решение $\psi(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_n(t)), t_0 \leqslant t < t_1$, системы (C), что для любого момента $t, t_0 \leqslant t < t_1$, выполнено условие максимума

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u)$$

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = 1. \tag{D}$$

Заметим, что если в теорме 2 решение $\psi(t)$ и условие максимума (D) рассматривать на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и заключительное условие $H(\psi(t), x(t), u(t)) = 1$ заменить более слабым требованием

$$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \geqslant 0, \tag{E}$$

то в этой форме принцип максимума будет справедлив без любых предположений о функции ω и станет *необходимым условием оптимальности.*

Задача оптимального управления для потребителя.

Допустим имеется некая динамическая система, состояние которой в каждый момент времени t описывается вектор-функцией $x(t) \in R^n$. На состояние системы можно воздействовать, меняя управляемые параметры $u(t) \in U_t \subseteq R^r$. Будем рассматривать класс кусочно-непрерывных управлений $u(t)$.

При заданном управлении $u(t)$ состояние системы меняется во времени согласно закону:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \tag{1}$$

Рассмотрим задачу оптимального управления данной системой: определить управление $u^*(t)$, доставляющее экстремум критерию качества вида:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \to max \tag{2}$$

Причем первое слагаемое (интегральная часть критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления $[t_0, t_1]$, в то время как второе слагаемое (терминальный член) - только конечный результат воздействия управления определяемый начальным $x(t_0)$ и конечным $x(t_1)$ состояниями и, по всей вероятности, моментами начала и окончания управления t_0 и t_1. В зависимости от физического смысла задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий:

$$\Phi_i(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, i = 1...m, \tag{3}$$

задающие множества допустимых начальных и конечных состояний системы и моментов начала и окончания управления.

Значимым частным случаем (3) являются условия вида:

$$x(t_0) - x_0 = 0; x(t_1) - x_1 = 0, \tag{4}$$

соответсвующие закрепленному левому или правому концу фазовой траектории.

Моменты времени начала и окончания управления, t_0 и t_1, могут быть как известными, тогда говорят о задаче с фиксированным временем управления, так и неизвестными (задача с нефиксированным моментом начала или окончания управления).

Необходимые условия оптимальности в данной задаче, а именно необходимые условия сильного локального максимума даются принципом максимума Понтрягина. Для решения дальнейших задач еще раз приведем формулировку теоремы в другой интерпретации.

Пример задачи оптимально управления. Задача 1. Найти оптимальное управление в задаче:

$$J(u,x) = \int_0^4 (u^2+x)dt \to min; \dot{x} = u; x(0) = 0; |u| \leqslant 1$$

Р е ш е н и е. Перепишем данную задачу в виде задачи на максимум

$$-\int_0^4 (u^2+x)dt \to max$$

и воспользуемся теоремой о необходимых условиях.

Функция Понтрягина (рис.3):

$$H = -\lambda_0(u^2+x) + \psi u;$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_0;$$

Условие трансверсальности:

$$\psi(4) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x(1)} = 0$$

(т.к. правый конец фазовой траектории свободен).

Проанализируем вырожденный случай: положим $\lambda_0 = 0$.

Тогда $\dot{\psi} \equiv 0$, откуда следует, что $\psi = const$. Но из условия трансверсальности следует, что $\psi \equiv 0$. Таким образом получили, что множители λ_0 и ψ одновременно равны 0, что противоречит условию теоремы. Значит вырожденных решений задача не имеет.

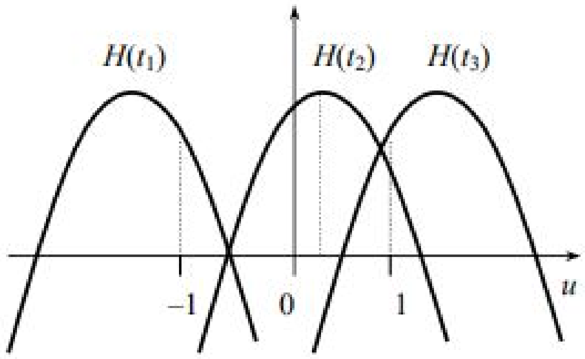

Рис. 3

Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда:

$$H = \psi u - u^2 - x \to max;$$

$$\dot{\psi} = 1; \psi(4) = 0.$$

H является квадратичной отрицательно определенной функцией u. Вершина параболы отыскивается из условия экстремума I порядка:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u = 0.$$

Если она лежит внутри отрезка изменения управления [-1, 1], то она и является точкой максимума. В противном случае максимум H достигается на правой либо левой границе отрезка (рис. 3).

Таким образом, получаем:

$$u^*(t) = \begin{cases} sgn\psi(t), & |\psi(t)| > 2 \\ \frac{\psi(t)}{2}, & |\psi(t)| \leqslant 2 \end{cases}$$

Оптимальное управление зависит от величины $\psi(t)$. Решая сопряженную сиситему, получаем $\psi(t) = t - 4$. Видно, что $-4 \leqslant \psi(t) \leqslant -2$ при $0 \leqslant t \leqslant 2$ и $-2 \leqslant \psi(t) \leqslant -2$ при $2 \leqslant t \leqslant 4$. Тогда

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ \frac{t-4}{2}, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases}.$$

Определим теперь фазовую траекторию $x^*(t)$, соответсвующую оптимальному управлению:

$$\dot{x} = u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ \frac{t-4}{2}, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^*(t) = \begin{cases} -t + c_1, & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ \frac{t^2}{4} - 2t + c_2, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases}.$$

Для участка траектории при $t \in [0, 2]$, постоянная интегрирования находится из начального условия $x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Для участка при $t \in [2, 4]$ воспользуемся условием непрерывности фазовой траектории $x(t)$ в точке $t = 2$:

$$\lim_{t \to 2-} x(t) = \lim_{t \to 2+}.$$

Из этого условия получаем $c_2 = 1$. Итак, окончательно:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ \frac{t-4}{2}, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^*(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ \frac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases}.$$

Фазовые ограничения в задаче оптимального управления.

Рассмотрим постановку задачи оптимального управления, учитывающую наличие фазовых ограничений. Моменты t_0, t_1, а также начальное состояние x_0 будем считать фиксированными.

Пусть требуется найти максимум функционала:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt + \Phi_0(x(t_1)) \to max, \tag{5}$$

если закон изменения состояния системы имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{6}$$

и дополнительно наложены фазовые ограничения:

$$g(t, x(t)) \geqslant 0; t \in [t_0, t_1], \tag{7}$$

где $g : R \times R^n \to R^s$ - непрерывно-дифференцируема по совокупности аргументов.

Рассмотрим лагранжиан данной задачи:

$$L(t, x(t), u(t), \psi(t), \mu(t)\lambda_0) = H(t, x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0) + (\mu(t), g(t, x(t))), \tag{8}$$

где $H(t, x(t), u(t), \psi(t), \lambda_0)$ - функция Понтрягина; $\mu(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_s(t)) \in R^n$- множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (3).

Тогда для данной задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $(x^*(t), u^*(t))$ - оптимальный процесс в задаче (1)-(3). Тогда найдуться не равные одновременно нулю множитель $\lambda_0 \geqslant 0$ и вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_n(t)) \in R^n$ и $\mu(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_s(t)) \in R^s$ такие, что: а) всюду на $[t_0, t_1]$ выполнено условие принципа максимума:

$$u^*(t) \in Argmax(H(t, x^*(t), u(t), \psi(t), \lambda_0)); \tag{9}$$

б) сопряженная функция $\psi(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial L}{\partial x_i(t_1)}; i = 1, ..., n \tag{10}$$

(где L-лагранжиан задачи) и условия трансверсальности на правом конце, в данной постановке имеющие вид:

$$\psi_i(t_1) = \lambda_0 \frac{\partial \Phi_0(x^*(t_1))}{\partial x_i(t_1)};$$

в) выполнены условия дополняющей нежесткости и неотрицательности множителя Лагранжа $\mu(t)$:

$$\mu_i(t) g_i(t, x(t)) = 0; \mu_i(t) \geqslant 0; i = 1, ..., s. \tag{11}$$

Заключение

Оптимальное управление неразрывно связано с выбором наиболее благоприятных режимов управления объектами, которые описываются при помощи систем простых дифференциальных уравнений. Одной из важных частей отчета являлось изложение принципа максимума Л.С. Потнтрягина, который является основным инструментом решением задач оптимального управления. Мы ознакомились с задачами об оптимальном быстродействии и вывели основные понятия, рассмотрели задачу оптимального управления для потребителя. Тем самым поставленные в начале работы задачи были успешно выполнены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Андреева Е.А., Бенке Х. Оптимизация управляемых систем. Тверь, Изд. ТГУ, 1996.

2 Антоник В. Г. Методы оптимального управления. Иркутск, 2017.

3 Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.:РЭШ, 2001.

4 Беленький В.З. Оптимальное управление: принцип максимума динамическое программирование. М.РЭШ, 2001.

5 Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления: – М. : Наука, 1969.

6 Зайцев Г. Ф. Теория автоматического управления и регулирования.— 2-е изд., перераб. и доп.— К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989.

7 Зеленкин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. 2-е изд. испр. и доп. М.: Едиториал УРСС, 2004.

8 Кузнецов Ю. А.,Семенов А.В. Применение систем компьютерной математики в задачах оптимального управления экономическими системами, Нижний Новгород, 2007.

9 Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении, Москва 2004.

10 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969.