МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Сплайн интерполяция

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Веселова Андрея Сергеевича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.		Ю. В. Матвеева
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

и. о. зав. кафедрой, к.ф.-м.н.		А. М. Захаров
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение В математике и ее приложениях постоянно приходится иметь дело с приближенными представлениями функций. Одним из инструментов для задач интерполяции в теории приближения являются сплайны. К достоинствам можно отнести их прекрасные аппроксимационные свойства, универсальность и простоту реализации.

В 1946 году Исаак Шенберг впервые употребил термин "сплайн" в качестве обозначения класса полиномиальных сплайнов.

До 1960 годов сплайны были в основном инструментом теоретических исследований, они часто появлялись в качестве решений различных экстремальных и вариационных задач, особенно в теории приближений.

После 1960 года с развитием вычислительной техники началось использование сплайнов в компьютерной графике и моделировании.

Сплайны имеют многочисленные применения как в математической теории, так и в разнообразных вычислительных приложениях. В частности, сплайны двух переменных используются для задания поверхностей в различных системах компьютерного моделирования.

В данной работе расмотрены интерполяционные кубические сплайны одной и двух переменных с краевыми условиями типов I-IV, алгоритмы построения через первую и вторую производные и оценки погрешности.

Цель работы заключается в исследовании интерполяции функций одной и двух переменных кубическими сплайнами.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- ввести основные определения, необходимые для построения интерполяционного сплайна одной и двух переменных;
- рассмотреть алгоритмы построения сплайнов, представленных через первую и вторую производные с краевыми условиями типов I-IV;
- доказать существование и единственность интерполяционного кубического сплайна одной и двух переменных;
- оценить погрешность приближения функций одной и двух переменных с помощью сплайнов;
- рассмотреть практические примеры интерполяции функций на равномерной и неравномерной сетках;

- сравнить погрешности приближений сплайнами с разными типами краевых условий и различным представлением.

Работа состоит из 5 глав.

В 1 главе сформулирована постановка задачи интерполирования сплайнами одной переменной, рассмотрены алгоритмы построения сплайнов, представленных через первую и вторую производные с краевыми условиями типов I-IV, доказана теорема существования и единственности сплайна одной переменной.

Во 2 главе приведены оценки погрешности интерполяции сплайнами одной переменной.

В 3 главе рассмотрены сплайны двух переменных: алгоритмы построения через первую и вторую производные с краевыми условиями типов I-IV, доказана теорема существования и единственности.

В 4 главе приведены оценки погрешности интерполяции сплайнами двух переменных.

В 5 главе описаны практические примеры интерполяции функций одной и двух переменных с помощью кубический сплайнов на равномерной и неравномерной сетках с различным числом разбиений. В примерах проведено сравнение погрешности приближений сплайнами, представленными через первую и вторую производные с разными типами краевых условий.

Реализация алгоритмов, вычисляющих сплайны, выполнена на C++, визуализация – на Python. Листинги кода представлены в приложениях А, Б.

Основное содержание работы Пусть на отрезке $[a,b]$ задано разбиение $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Обозначим через $C^k = C^k[a,b]$, где $k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$, множество k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, а через $C^{-1}[a,b]$ — множество кусочно-непрерывных функций с точками разрыва первого рода.

Определение 1. Функция $S_{n,v}(x)$ называется сплайном степени n дефекта v ($v \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant v \leqslant n+1$) с узлами на сетке Δ, если выполняются условия:

а) $S_{n,v}(x) = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} a_\alpha^i (x - x_i)^\alpha$ для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$; (1)

б) $S_{n,v}(x) \in C^{n-v}[a,b]$.

Определение 4. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы значения некоторой функции $f_i = f(x_i), i = \overline{0, N}$ в узлах сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Интерполяционным кубическим сплайном дефекта 1 называется сплайн, $S_{3,1}(f; x) \equiv S(f; x)$, удовлетворяющий условиям:

$$S(f; x_i) = f_i,\ i = \overline{0, N}. \tag{1.1}$$

Определение 5. Два дополнительных условия, которые задаются в виде ограничений на значения сплайна и его производных на концах промежутка $[a, b]$ (или вблизи концов), называются краевыми условиями.

Существует несколько различных видов краевых условий, из которых наиболее употребительными являются следующие типы:

I. $S'(f; a) = f'(a),\ S'(f; b) = f'(b)$.
II. $S''(f; a) = f''(a),\ S''(f; b) = f''(b)$.
III. $S^{(r)}(f; a) = S^{(r)}(f; b),\ r = 1, 2$.
IV. $S'''(f; x_p + 0) = S'''(f; x_p - 0),\ p = 1, N-1$.

Кубический сплайн $S(f; x)$ можно представить через его первую производную $m_i = S'(f; x_i)$, $i = \overline{0, N}$ и рассматривать как эрмитов кубических сплайн, удовлетворяющий условиям (1.1):

$$S(f; x) = f_i(1-t)^2(1+2t)+f_{i+1}t^2(3-2t)+m_ih_it(1-t)^2-m_{i+1}h_it^2(1-t), \tag{1.3}$$

где $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$.

Вычисление коэффициентов m_i, в зависимости от типа краевых условий приведено в работе.

Теорема 2. Интерполяционный кубический сплайн $S(x)$, удовлетворяющий условиям (1.1) и одному из типов краевых условий I–IV, сущствует и единственен. Доказательство теоремы приведено в работе.

В некоторых случаях более удобным представлением кубического сплайна является представление его через вторую производную $M_i = S''(x_i)$, $i = \overline{0, N}$, используя формулу

$$S(x) = f_i(1-t) + f_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1-t)\left[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}\right], \tag{1.10}$$

где $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$.

Вычисление коэффициентов M_i, в зависимости от типа краевых условий приведено в работе.

Получение оценок погрешности для кубических сплайнов дефекта 1 представляет собой сложную задачу, трудности которой связаны с неявным заданием сплайнов.

Пусть $S(x)$ — интерполяционный сплайн, удовлетворяющий условиям (1.1). Если функция $f(x)$ — периодическая, то для $S(x)$ используем краевые условия типа III. При интерполяции непериодических функций из $C[a, b]$ будем использовать разностный аналог краевых условий типа I:

$$S'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h_0}, \quad S'(x_N) = \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}. \tag{2.1}$$

Функцию $f(x) \in C[a, b]$ на сетке $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ будем характеризовать ее колебанием на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\omega_i(f) = \max_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |\, f(x'') - f(x')\,|.$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega(f) = \max_{0 \leqslant i \leqslant N-1} \omega_i(f),\ \beta = \frac{\overline{h}}{\underline{h}} = \frac{\max\limits_i h_i}{\min\limits_i h_i}.$$

Сформулируем теоремы, позволяющие сделать оценку погрешности.

Теорема 3. Если $f(x) \in C[a, b]$ и $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2.1) или условиям типа III, то

$$\|\, S(x) - f(x)\,\|_C \leqslant \left(1 + \frac{3}{4}\,\beta\right) \omega(f). \tag{2.2}$$

Особенностью данной оценки является зависимость коэффициента при $\omega(f)$ от отношения максимального и минимального шагов сетки.

Пусть $W_p^k\,[a, b]$ – множество функций, имеющих на $[a, b]$ абсолютно непрерывную производную $(k-1)$ порядка и производную k порядка на пространстве $L_p\,[a, b]$.

Теорема 5. Если $f(x) \in W_\infty^1[a, b]$ и $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2.1) или условиям типа III, то

$$\| S(x) - f(x) \|_C \leqslant \frac{5}{4} \overline{h} \| f'(x) \|_\infty .$$

Доказательство теорем приведено в работе.

Существуют и другие оценки погрешности интерполяции кубическим сплайном $S(x)$: оценки, полученные для величин $| m_i - f'_i |$, $| M_i - f''_i |$ в зависимости от того, к какому классу принадлежит функция $f(x)$. Рассмотрим следующие леммы.

Лемма 1. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ и удовлетворяет краевым условиям типов I,II,III, то справедливы следующие оценки:

$$| m_i - f'_i | \leqslant q, \quad \forall i = \overline{0, N}, \tag{2.14}$$

$q = 3\,\omega(f')$, если $f(x) \in C^1[a,b]$; $q = \dfrac{2}{3} \overline{h}\, \omega(f'')$, если $f(x) \in C^2[a,b]$.

Лемма 2. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in C^2[a,b]$ и удовлетворяет краевым условиям одного из типов I,II,III, то справедливы следующие оценки:

$$| M_i - f''_i | \leqslant 3\,\omega(f''), \quad \forall i = \overline{0, N}. \tag{2.19}$$

Доказательство лемм приведено в работе.

Рассмотрим сплайны двух переменных. Пусть в области $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ введена сетка $\Delta = \Delta_x \times \ \Delta_y$, где $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d$, на которой будем рассматривать кубические сплайны дефекта 1 от двух переменных (которые принадлежат классу $C^{2,2}[\Omega]$). В ячейке $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ они имеют следующий вид:

$$S(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} a^{ij}_{\alpha\beta} (x - x_i)^\alpha (y - y_j)^\beta, \; i = \overline{0, N}, \; j = \overline{0, M}. \tag{3.1}$$

Определение 7. Пусть в узлах сетки Δ заданы значения функции f_{ij}. Интерполяционным кубическим сплайном двух переменных называется сплайн, принимающий на сетке Δ значения:

$$S(x_i, y_i) = f_{ij}, \; i = \overline{0, N}, \; j = \overline{0, M}. \tag{3.2}$$

Теорема 6. Интерполяционный кубический сплайн двух переменных $S(x,y)$, удовлетворяющий условиям (3.2) и одному из типов краевых условий I–IV, существует и единственен. Доказательство теоремы приведено в работе.

Рассмотрим алгоритм построения кубического сплайна через первую производную. Для удобства в работе с данными, построим таблицу (3.1).

Первый шаг. Построим кубические сплайны $S(x, y_j)$, $j = \overline{0, M}$, по переменной x, по строкам таблицы (3.1), включая граничные (если они имеются), с краевыми условиями из граничных столбцов. Затем перейдем к решению систем уравнений, число которых зависит от вида краевых условий: $(M+3)$ – для типов I и II; M, $(M+1)$ – для типов III, IV соответственно. В результате найдем значения $m_{ij}^{(1,0)} = D^{(1,0)}\,S(x_i, y_j)$, где $(x_i, y_j) \in \Delta$. Запишем их в таблицу (3.2), аналогичную таблице (3.1).

Второй шаг. Построим кубические сплайны $\tilde{S}(x_i, y)$, $i = \overline{0, N}$ по переменной y, по столбцам таблицы (3.2). Это будут, частные производные по x, $D^{(1,0)}\,S(x_i, y)$, искомого сплайна на линиях $x = x_i$. На этом шаге решается $(N+1)$ одномерная задача в непериодическом случае и N задача в периодическом. Значениями производных сплайнов $D^{(0,1)}\,\tilde{S}(x_i, y)$ в узлах сетки Δ являются смешанные частные производные искомого сплайна на сетке, $m_{ij}^{(1,1)} = D^{(1,1)}\,S(x_i, y_j)$.

Третий шаг. По данным таблицы (3.1) построим сплайны $S(x_i, y), i = \overline{0, N}$. Число решаемых задач — такое же, как на втором шаге. В результате найдем значения $m_{ij}^{(0,1)} = D^{(0,1)}\,S(x_i, y_j)$.

Таким образом, получили значения величин f_{ij}, $m_{ij}^{(1,0)}$, $m_{ij}^{(0,1)}$, $m_{ij}^{(1,1)}$ в узлах сетки Δ, которые определяют некоторый сплайн двух переменных. Этот сплайн по построению удовлетворяет интерполяционным условиям (3.2) и заданным краевым условиям.

Можно воспользоваться и другим вариантом данного алгоритма, поменяв ролями переменные x и y.

Вычисление коэффициентов m_i и самого сплайна, в зависимости от типа краевых условий приведено в работе.

Аналогичным образом рассматривается алгоритм, в котором кубический сплайн представим через вторую производную.

В области $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ введем сетку $\Delta = \Delta_x \times\ \Delta_y$, где $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d$. Пусть в узлах (x_i, y_j) заданы значения $D^{r,s}\,f(x_i, y_j) = f_{ij}^{(r,s)},\ r, s = 0, 1;\ i = \overline{0, N};\ j = \overline{0, M}$.

Определение 9. Интерполяционный сплайн $S_3[f(x,y);x]$ называется частичным, если он представляет собой эрмитов кубический сплайн для функции $f(x,y)$ на сетке Δ_x, где y играет роль параметра. Данный сплайн можно записать в виде:

$$S_3[f(x,y);x] = \sum_{\alpha=0}^{3} a_\alpha(y)(x-x_i)^\alpha, \ x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{4.4}$$

Аналогично определяется частичный сплайн $S_3[f(x,y);y]$.

Используя сплайны $S_3[f(x,y);x]$, $S_3[f(x,y);y]$, получим оценки погрешности интерполяции кубическими сплайнами двух переменных:

$$S(f;x,y) - f(x,y) = \{S[T_2(x,y);y] - T_2(x,y)\} + T_1(x,y) + T_2(x,y),$$
$$S(f;x,y) - f(x,y) = \{S[T_1(x,y);x] - T_1(x,y)\} + T_1(x,y) + T_2(x,y),$$

где $T_1(x,y) = S[f(x,y);y] - f(x,y)$, $T_2(x,y) = S[f(x,y);x] - f(x,y)$.

Используя алгоритмы, описанные 1 и 3 главах, построим кубические сплайны одной и двух переменных. Рассмотрим представление сплайнов через первую и вторую производные для краевых условий типов I–IV. Описанные алгоритмы предусматривают построение сплайна как на равномерной, так и неравномерной сетке, которую можно инициализировать двумя способами: инициализация сетки и числа ее разбиений в коде проекта и считывание данных из файла.

Рассмотрим интерполирование некоторых функций одной и двух переменных при помощи сплайнов и проведем сравнение максимальных значений погрешности среди сплайнов с различными краевыми условиями. Также проанализируем зависимость между количеством разбиений сетки и точностью интерполяции на равномерной и неравномерной сетках.

Заключение В данной работе были рассмотрены интерполяционные кубические сплайны одной и двух переменных. Были введены необходимые определения, доказаны теоремы существования и единственности решения, рассмотрены алгоритмы построения сплайнов и оценки погрешности.

В практической части были рассмотрены сплайны одной и двух переменных, представленные через первую и вторую производные, с краевыми условиями типов I-IV на равномерной и неравномерной сетках, используя алгоритмы, описанные 1 и 3 главах.

Используя алгоритмы, описанные в главе 1, было реализовано построение сплайна одной переменной. Исходный код приведен в Приложении А.

Используя алгоритмы, описанные в главе 3, было реализовано построение сплайна двух переменных. Исходный код приведен в Приложении Б.

На практических примерах было рассмотрено интерполирование некоторых функций одной и двух переменных при помощи сплайнов и проведено сравнение максимальных значений погрешности среди сплайнов с разными краевыми условиями. Также была проанализирована зависимость между количеством разбиений сетки и точностью интерполяции на равномерной и неравномерной сетках.