МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Построение крунодальных кривых

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Экажева Саида Магомеда Мусаевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ______ Л.Н. Романкина
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ______ С.В. Галаев
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. *Актуальность темы.* В различных разделах математики и на разных этапах ее изучения мы встречаемся с кривыми третьего порядка, или кубиками. Напомним, что *кубика* — это плоская алгебраическая кривая 3-го порядка, то есть множество точек (проективной, аффинной или евклидовой) плоскости, однородные координаты которых (относительно соответственно проективной, аффинной или декартовой системы координат) удовлетворяют алгебраическому уравнению третьей степени [1,2].

Изучение алгебраических кривых началось не одно столетие назад. Сначала древними математиками были изучены простые линии, такие, как прямые и окружности, затем были исследованы более сложные линии второго порядка, названные коническими сечениями, сведения о них впервые систематизировал Аполлоний Пергский (262 - 190 г. до н.э.) [3]. С развитием аналитического метода исследования геометрических объектов Декартом, XVI – XVII вв., у математиков появилась возможность изучать линии более высоких порядков, например, кубические кривые. На этом этапе начинается активное развитие теории алгебраических кривых [4,5]. Многие исследованные замечательные кривые нашли свое применение в физике и технике, в истории математики с ними связаны важные теоретические открытия.

На сегодняшний день алгебраические кривые находят применение в физике, технике и архитектуре (см., например, [1,2,5,6]); особого вида алгебраические кривые третьего порядка, называемые эллиптическими, активно применяются в криптографии. Изучение алгебраических кривых развивает математическое мышление, устанавливает связь математической теории с практикой, позволяет расширить геометрические представления и повысить интерес к геометрии, а также создает содержательную основу для дальнейшего изучения математики, физики и других наук. В связи с этим знакомство как с общими методами исследования кривых, так и с отдельными кривыми и их свойствами вызывает особый интерес.

Целью данной работы является изучение общих сведений о кривых третьего порядка, а также описание частных и универсального методов построения кубических кривых с узловой точкой. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**.

1. Познакомиться с историей развития теории алгебраических кривых.

2. Изучить и изложить общие свойства алгебраических кривых третьего порядка.

3. Рассмотреть некоторые замечательные кривые третьего порядка с узловой точкой (такие кривые будем называть *крунодальными кубиками*).

4. Описать различные частные способы построения некоторых замечательных кривых третьего порядка с узловой точкой.

5. Изложить универсальный метод построения крунодальных кубик, предложенный в работе [7].

Содержание работы. Работа состоит из введения, двух основных разделов, заключения и списка использованных источников, содержащего 20 наименований.

В первом разделе представлены исторические факты истории развития алгебраических кривых, а также общие свойства кривых 3-го порядка. Во втором разделе описаны свойства Декартова листа и строфоиды, а также частные способы их построения. Далее описан универсальный метод построения крунодальных кубик на проективной плоскости, и предложена его адаптация на плоскости евклидовой в случае, когда узловая точка кубики является собственной точкой плоскости.

В п. 2.5 представлено оригинальное самостоятельное исследование автора. Получено общее уравнение Гессианы крунодальной кубики на проективной плоскости, определено ее порождающее множество, и выполнено построение универсальным методом с использованием динамической системы GeoGebra.

Методика работы. В процессе работы мы познакомились с литературой [1-20] по теме исследования и систематизировали материал, относяйщийся к вопросу построения кубических кривых. Моделирование различных крунодальных кубик на евклидовой плоскости и построение изображений описанных кривых проведено самостоятельно с использованием математической динамической системы GeoGebra.

Основное содержание работы. 1. Общие сведения о кривых третьего порядка. В этом разделе мы приведем без доказательств основные факты о кривых третьего порядка. Первый пункт раздела посвятим историческому обзору развития учения о кривых. *Исторические сведения о плоских кривых.* Определение самой линии сложилось в сознании человека в первобытные времена. Неоднократно наблюдаемые нашими предками явления природы, такие как траектория брошенного камня, струя воды, лучи света, контур цветов, листья растений, а также извилистая линия берега реки или моря, послужили базисом для постепенного утверждения понятия линии.

Все же понадобился значительный исторический период, прежде чем люди начали соотносить между собой формы кривых линий и различать кривые между собой. Рисунки первобытных людей на стенах пещер, первобытные

Греческие ученые создали теорию коник (конических сечений) — линий, которые имеют особое значение в науке и технике.

Одним из важнейших событий в истории математики является появление книги «Геометрия» Р. Декарта (1637 г.), в ней были изложены основы метода координат.

В XIX в. развиваются новые методы исследования кривых второго порядка.

К представлению о натуральном уравнении кривой привело другое направление. Такое уравнение уже не зависит от положения системы координат и от вида системы координат; конкретнее говоря, оно вообще не предполагает наличия системы координат. Натуральное уравнение функционально связывает радиус кривизны кривой и длину её дуги, т. е. элементы, органически связанные с самой природой исследуемой линии. Доказано, что натуральное уравнение определяет кривую с точностью до ее расположения на плоскости.

Плодотворную идею использования векторного аппарата при исследовании кривых связывают с именем Грассмана. В настоящее время наиболее сложные формы кривых исследуют с помощью топологического метода.

Формулы Плюккера. Основные обозначения: K_n— кривая n-то порядка; K^m— кривая m-то класса; K_n^m— кривая n-го порядка и m-то класса.

Для невырожденных кривых третьего порядка Плюккер определил следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{c} k = n(n-1) - 2d - 3r, \\ 3(k-n) - \omega - r, \\ \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \dfrac{(k-1)(k-2)}{2} - t - \omega, \\ \omega = 3n(n-2) - 6d - 8r, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где k — класс кривой (число касательных, которые можно провести к кривой из точки, находящейся за ее пределами), n — ее порядок, r — количество точек возврата, d — количество других двойных точек, ω — количество точек перегиба, t — количество двойных касательных, p — род кривой (разность между наибольшим возможным и настоящим числом двойных точек).

Точки перегиба и кратные точки. Кратной точкой плоской кривой $F(x,y) = 0$ называется особая точка, в которой обращаются в 0 частные производные до порядка n включительно и хотя бы одна из частных производных (n+1)-го порядка не равна 0. Например, если $F(x_0,y_0) = 0, F'_x(x_0,y_0) = 0, F'_y(x_0,y_0) = 0$, но из производных $F''_x x(x_0,y_0), F''_x y(x_0,y_0), F''_y y(x_0,y_0)$ хотя бы одна не равна 0, то кратная точка $M(x_0,y_0)$ называется двойной точкой; если же в точке (x_0,y_0) равны нулю первые и вторые частные производные и не равна нулю хотя бы одна из трех производных, то кратная точка называется тройной точкой и т. д.

Точка перегиба — точка плоской кривой, в которой её ориентированная кривизна меняет знак. Точка перегиба регулярной кривой — это такая точка этой кривой, в которой касательная к кривой имеет с ней соприкосновение второго порядка и разбивает кривую, то есть точки кривой, лежащие в некоторой окрестности данной точки по разные стороны от этой точки, лежат также по разные стороны от касательной. Если кривая 2-регулярна, то условие заменяется на следующее: ориентированная кривизна кривой при переходе через точку перегиба изменяет знак. Точкой высшего (вырожденного) перегиба кривой называется такая её точка, касательная к кривой в которой имеет с ней соприкосновение, порядок которого не ниже трёх, и касательная разбивает кривую.

Точка кривой называется точкой распрямления, если кривизна кривой в этой точке равна нулю.

Для алгебраической кривой несингулярная точка является точкой перегиба тогда и только тогда, когда кратность точки пересечения касательной с кривой нечётна и больше двух.

Теорема 1.3.2 (Маклорена). Дана кривая K_3, проведем касательные в трех точках пересечения кривой с некоторой прямой, тогда точки пересечения касательных с кривой лежат также на одной прямой.

Теорема 1.3.3. Дана кривая третьего порядка, прямая проходящая через две ее точки перегиба, обязательно пройдет также через третью точку перегиба данной кривой.

Касательные, асимптоты и нормали. Касательные к кубике, параллельные асимптотам, образуют треугольник. Если точки касания соединены прямыми с вершинами противоположных углов треугольника, то эти прямые пересекаются в одной точке.

Если из точки O кривой третьего порядка с узловой, либо изолированной точкой провести две касательные OP и OQ, затем из одной из точек касания, например P, опять провести две касательные к кривой третьего порядка, то на одной прямой с Q лежат две новые точки касания.

У кривой K_3 из двух точек проведено по четыре касательные; если прямые соединяют попарно точки касания обоих пучков, то они пересекаются в одной точке кривой.

У кривой третьего порядка в любом направлении существует шесть параллельных касательных; точки их касания лежат на конической поляре, которая соответствует бесконечно удаленной точке.

У кривой третьего порядка существует 36 касательных, параллельных касательным в точках перегиба.

2. Поточечное построение кубических кривых с узловой точкой.
2.1 Частные способы построения замечательных крунодальных кубик. *Декартов лист.Особенности формы.* Декартов лист это кривая третьего порядка, которая в прямоугольной системе коорди-

нат задается уравнением:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \tag{2}$$

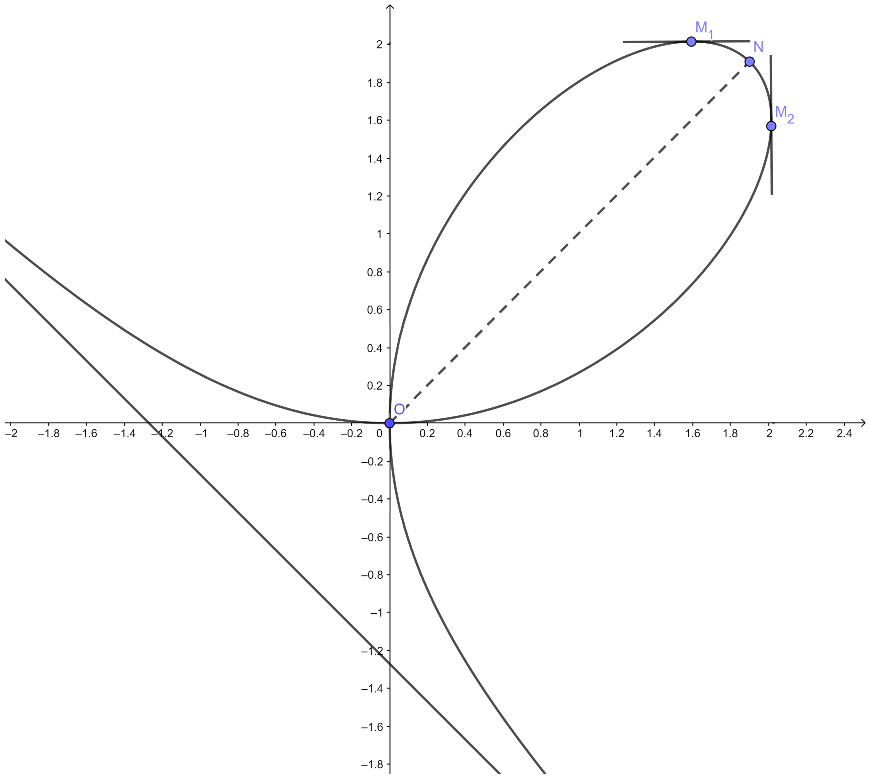

Рисунок 1

Способ построения. Отметим, что в случае когда ось симметрии декартова листа принимаем за ось абсцисс, то уравнение декартова листа имеет вид

$$y^2 = -\frac{1}{3}\frac{x - \frac{3a}{\sqrt{2}}}{x + \frac{a}{\sqrt{2}}}x^2 \tag{3}$$

Допустим дана окружность с центром в точке $M(\frac{r}{2}, 0)$ и радиусом r и прямая $x = -h$. Отметим произвольную точку Q данной окружности, также проведем прямые QA и QN, так чтобы прямая QN была перпендикулярна к оси абсцисс

На прямой QA из точки R ее пересечения с прямой $x = -h$ проведем прямую RO до ее пересечения с прямой QN в точке Q_1. Тем самым, на окружно-

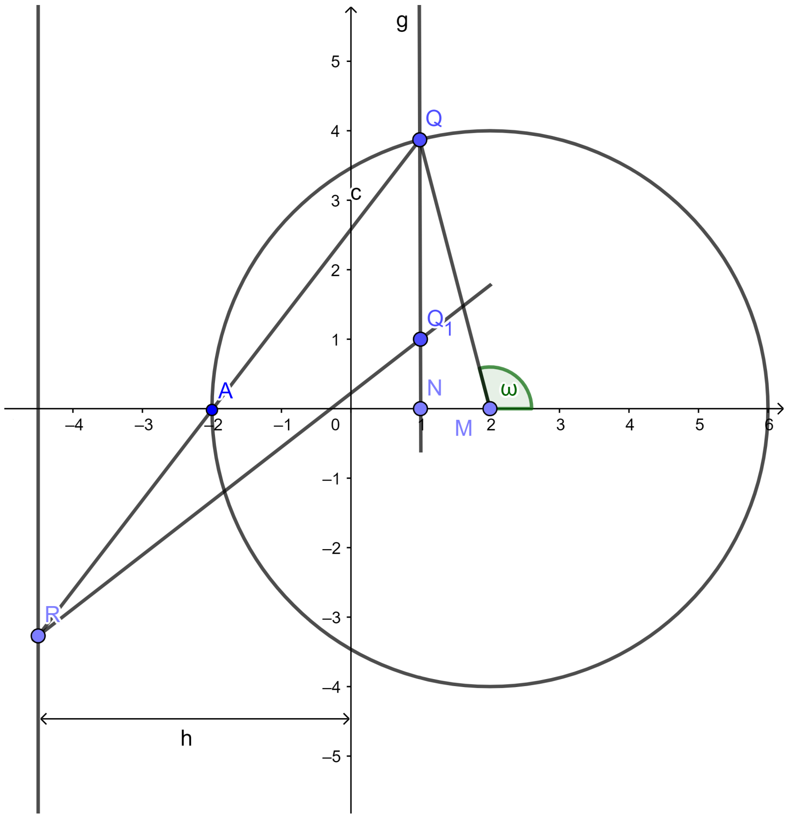

Рисунок 2

сти точке Q будет поставлена в соответствие точка Q_1. Геометрическое место точек Q_1 представляет собой декартов лист.

Строфоида. Особенности формы. Строфоидой является геометрическое место точек, которые построены следующим образом: возьмем фиксированную точку A и фиксированную прямую g, при этом из точки A на прямую g опущен перпендикуляр $AC = a$; также вокруг точки A вращается луч, откладывающий от точки его пересечения с прямой g отрезки BM и BM_1, при этом так, что $BM = BM_1 = CB$; строфоидой будет являться геометрическое место точек M и M_1 (Рисунок 2.3).

Косая строфоида. Строфоида рассмотренная нами выше является частным случаем косой строфоиды, рассмотрим на стереометрическом способе ее образования. Представим себе конус с вершиной в точке V, его образующими g_1 и g_2 и касательной к нему, которая проходит через точку A перпендикулярно к g_1. Проведем через данную касательную секущую плоскость и пусть точки M и M_1 будут фокусами полученного сечения. Далее представим, что эта секущая плоскость поворачивается вокруг касательной, в этом случае точки

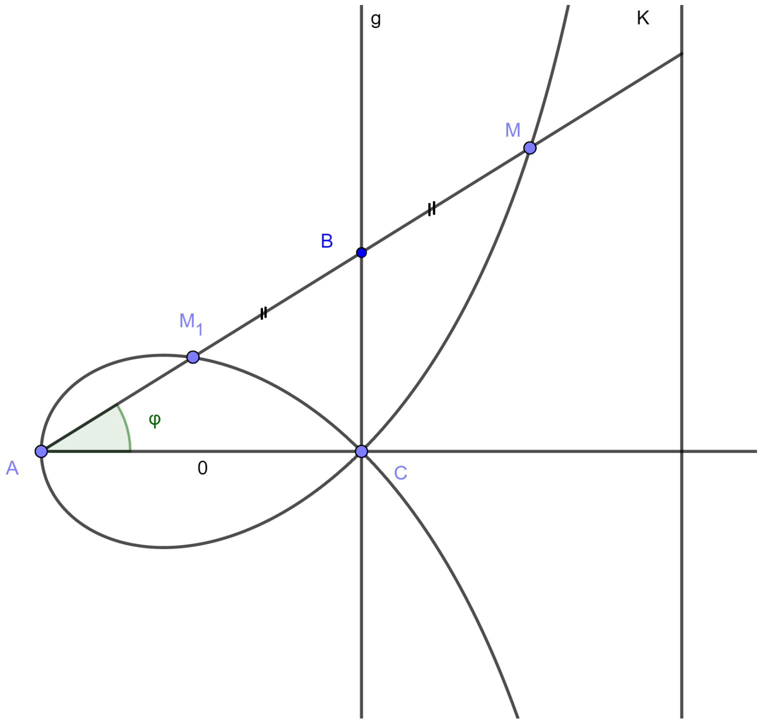

Рисунок 3

M и M_1 опишут косую строфоиду, которая будет лежать в плоскости, перпендикулярной к данной касательной. Для того чтобы определить положения образующих точек M и M_1 на прямой AP, которая является линией пересечения секущей плоскости с плоскостью чертежа, будет достаточно вписать в конус два шара, касающихся секущей плоскости; фокусами конического сечения будут точки касания, т. е. точки M и M_1. Все же построение может быть упрощено и целиком переведено на плоскость чертежа. Обозначим середину отрезка AP через B, тогда заметим, что точки аналогичные B, лежат на прямой l, параллельной образующей g_2. Ясно, что эта прямая будет проходить также через точки N и C, которые являются серединами отрезков AV и AK, при этом точка K выбрана так, что $AV = AK$. Если обозначить при этом $VA = a, VP = b, AP = c$, то получим $AM = \dfrac{a-b+c}{2}, PM = \dfrac{-a+b+c}{2}$, и так как $AB = \frac{c}{2}$, то $BM = BM_1 = \dfrac{a-b}{2}$, но $BC = \frac{1}{2}PK = \dfrac{a-b}{2}$, следовательно, $BM = BM_1 = BC$.

Полученное соотношение определяет планиметрический способ построения косой строфоиды: пусть дан угол с вершиной в точке C; отметим на одной из его сторон точку A и проведем через эту точку произвольный луч, пересекающий другую сторону в точке B, тогда точки M и M_1 данного луча, которые построены так, что $BM = BM_1 = BC$ принадлежат строфоиде.

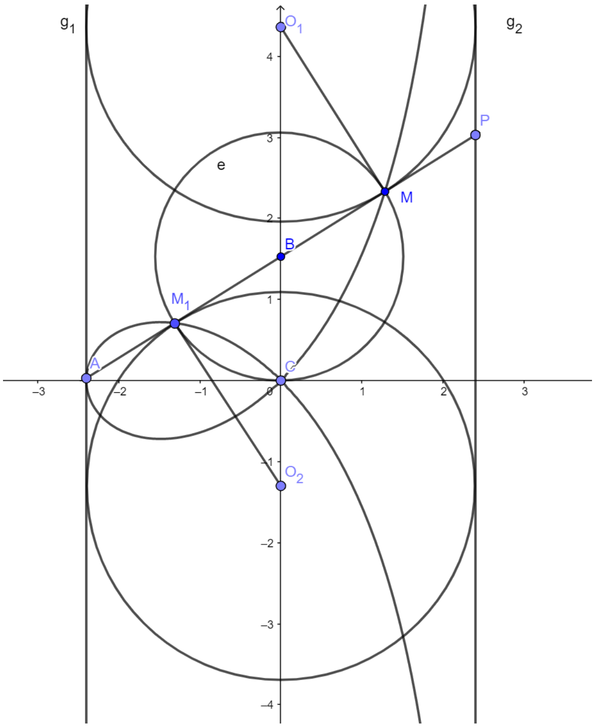

Рисунок 4

2. Универсальный метод построения крунодальных кубик. *Аналитическое задание крунодальной кубики на проективной плоскости* P_2 Универсальный метод построения кубических кривых с узлом на проективной плоскости строится на основании следующей теоремы из работы [7]:

Теорема 2.2.1.1 Пусть в проективной плоскости P_2 существует крунодальная кубика σ. Тогда существует такое двухпараметрическое множество проективных реперов, в каждом из которых данная кривая σ может быть задана следующим кубическим уравнением

$$k^2x_1^3 + 2vk(p-q)x_1^2x_2 + (1+2vq)x_1x_2^2 + vk^2x_1^2x_3 - vx_2^2x_3 = 0, \qquad (4)$$

где k, v, p и q - действительные числа, которые удовлетворяют условиям

$$k \neq 0, \quad v \neq 0, \quad vp+1 \neq 0, \quad 2vq - vp + 1 \neq 0. \qquad (5)$$

Метод построения крунодальных кубик на проективной плоскости P_2

Алгоритм построения. На проективной плоскости P_2 зафиксируем несколько вещественных коллинеарных точек V, P, O и Q.Обозначим через $\tilde{l}$. Допустим условия: $V \neq O, V \neq P$ и $(VPOQ) \neq -1$. Иначе говоря пары точек (V, P) и (O, Q) не являются гармоническими. Пусть даны две различные вещественные прямые $\tilde{k}$ и $\tilde{h}$, которые содержат точку O. Допустим, что точка H отличная от точки O, будет лежать на прямой $\tilde{h}$. Пусть B_1 является произвольной точкой на прямой $\tilde{h}$, а B_2 будет четвертой гармонической точкой для точек H, B_1 и O:

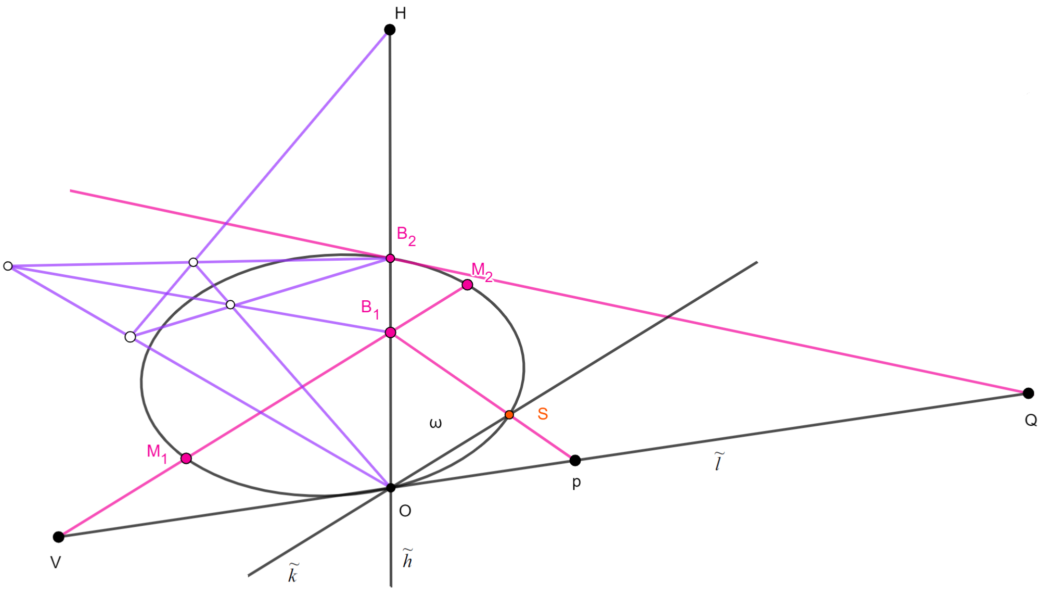

Рисунок 5 — Поточечное построение крунодальной кубики с порождающей множеством $\Theta = \{O, V, P, Q, H, \tilde{k}\}$

$$(HB_1OB_2) = -1. \tag{6}$$

На данном рисунке точка B_2 построена с помощью полного четырехугольника.

Точку пересечения прямых PB_1 и $\tilde{k}$ обозначим через S. Затем построим конику ω, однозначно определяющуюся следующими условиями:

1. точка O принадлежит конике ω;

2. прямая $\tilde{l}$ является касательной к конике ω;

3. точка B_2 принадлежит конике ω;

4. прямая QB_2 является касательной к конике ω;

5. точка S принадлежит конике ω.

Точки пересечения прямой VB_1 и коники ω обозначим через M_1 и M_2. В случае, когда прямая VB_1 вращается вокруг точки V, точки M_1 и M_2 описывают кривую, обозначим получающуюся кривую через σ. Обозначим множество объектов $\Theta = \{O, V, P, Q, H, \tilde{k}\}$ и назовем *порождающим множеством* кривой σ.

Характеристика результата Мы доказали, что **любая кривая, построенная предложенным методом, является кубической кривой с узлом**.

Универсальность предложенного алгоритма.

Теорема 2.3.3.1 Для каждой крунодальной кубики σ проективной плоскости P_2 существует двухпараметрическое семейство порождающих множеств, каждое из которых обеспечивает построение точек σ.

Построение замечательных кубических кривых с узлом в Евклидовой плоскости В этом разделе мы продемонстрируем универсальный метод построения крунодальных кубик на примерах замечательных кривых евклидовой плоскости E_2.

В отличие от проективной плоскости, в евклидовой плоскости E_2 мы рассматриваем кривую вместе с прямой на бесконечности, то есть с абсолютной прямой. Имеется в виду, что абсолютная прямая l_∞ евклидовой плоскости совпадает с координатной прямой A_1A_2 используемый проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, а абсолютные циркулярные точки J_1J_2 плоскости E_2 имеют координаты $(\pm i : 1 : 0)$. Согласно этому соглашению, выполняются следующие соотношения между декартовыми координатами (x, y) и проективными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ одной и той же точки

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{7}$$