МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Методы нахождения решений матричных игр

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Коробковой Арины Дмитриевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м. н., профессор ________ В.В. Розен
должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
к.ф.-м.н., доцент ________ С.В. Галаев
должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. Содержание управления экономикой сводится к постоянному выбору оптимальных решений. От того, насколько эффективны принимаемые решения, зависит состояние производственно-технологической и социальной сфер экономики. Сложный характер рыночной экономики предъявляет серьезные требования к обоснованию принятия решений. Одним из способов удовлетворения этих требований является постановка задач принятия решений на математическую основу.

Теория игр представляет собой теоретические основы математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях рыночных отношений, носящих характер конкурентной борьбы, в которых одна противоборствующая сторона выигрывает за счет другой стороны. Наряду с такой ситуацией в теории принятия решений рассматривают также ситуации риска и неопределенности, которые имеют различные модели и требуют разных критериев выбора оптимальных решений.

В данной работе поставлены следующие задачи:

- рассмотреть матричную игру как модель конфликтов;
- изучить принцип максимина;
- рассмотреть нахождение матричной игры описанием крайних точек и графоаналитическим методом.

Основное содержание работы.

Матричная игра конечная игра двух игроков с нулевой суммой. Предположим, что первый игрок имеет m стратегий A_i, $i = \overline{1,m}$, а второй игрок n стратегий B_j, $j = \overline{1,n}$,. Тогда игра может быть названа игрой $m \times n$. Обозначим через a_{ij} значения выигрышей игрока A (соответственно значения проигрышей игрока *B),* если первый игрок выбрал стратегию A_i, а второй игрок стратегию B_j. В этом случае говорят, что имеет место ситуация $\{A_i, B_j\}$.

Значения выигрышей a_{ij}, (эффективностей) можем представить в виде платежной таблицы, называемой *матрицей игры* или *платежной матрицей:*

Таблица 1.1

		Игрок 2			
		B_1	B_2	…	B_n
Игрок 1	A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	…	…	…	…	…
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Или в виде матрицы:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Биматричная игра конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. Выигрыш каждого игрока задается своей платежной матрицей вида (1.1).

$$a_{ij} = f(i, j) \qquad (1.2)$$

является непрерывной, то игра называется непрерывной, если (1.2) выпуклая, то игра называется выпуклой, если (1.2) можно представить в виде суммы произведений функций одного аргумента сепарабельной.

Такая игра происходит партиями. Партия игры состоит в том, что игроки одновременно называют свой выбор: первый игрок называет некоторый номер строки матрицы A (по своему выбору или случайно), а второй – некоторый номер столбца этой матрицы (также по своему выбору или случайно).

В общем виде матрица игры строится следующим образом:

- перечисляем все возможные чистые стратегии A_i и B_j игроков;
- формализуем правила, по которым развивается конфликт в виде функции выигрышей $f(i,j) = a_{ij}$.

Если мы (т. е. первый игрок) выбираем свою i-ю стратегию (i-ю строку матрицы А), то второй игрок, будучи разумным, выберет такую стратегию j, которая обеспечит ему наибольший выигрыш (а нам, соответственно, наименьший), т. е. он выберет такой столбец j матрицы А, в котором платеж (второго игрока первому) минимален. Переберем все наши стратегии i = 1, 2, …, m и выберем ту из них, при которой второй игрок, действуя максимально разумно, заплатит нам наибольшую сумму. Величина

$$\nu_1 = \max_i \alpha = \max_{i=1,2,..m} \min_{j=1,2,..n} a_{ij}$$

называется нижней ценой игры, а соответствующая ей стратегия первого игрока – *максиминной*. Аналогичные рассуждения (но уже с точки зрения второго игрока) определяют верхнюю цену игры

$$\nu_2 = \min_i \beta = \min_{i=1,2,..m} \max_{j=1,2,..n} a_{ij}$$

и соответствующую ей минимаксную стратегию второго игрока. Подчеркнем, что по своему определению нижняя цена игры α представляет собой максимальный гарантированный выигрыш первого игрока (т. е. применяя свою максиминную стратегию, первый игрок обеспечивает себе выигрыш, не меньший α), а верхняя цена – величину, противоположную минимальному гарантированному проигрышу второго игрока (т.е. применяя свою минимаксную стратегию, второй игрок гарантирует, что он не проиграет больше чем β, или, по-другому, выиграет не меньше чем (–β)).

Если α = β, то говорят, что игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, общее значение α и β называется при этом ценой игры и обозначается ν = α = β . При этом стратегии игроков, соответствующие седловой точке, называются оптимальными чистыми стратегиями, так как эти стратегии являются наиболее выгодными сразу для обоих игроков, обеспечивая первому игроку гарантированный выигрыш не менее n, а второму игроку – гарантированный проигрыш не более $(-\nu)$, и отклоняться игрокам от этих стратегий невыгодно.

Определение. Пусть Γ_A — матричная игра с платежной матрицей А = $\| a_i^j \|$.
Ситуация (i_0, j_0) называется седловой точкой в игре Γ_A**,** если при всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ выполняется двойное неравенство:

$$a_i^{j_0} \le a_{i_0}^{j_0} \le a_{i_0}^{j} \qquad (2.1)$$

Соотношение (2.1) можно пояснить следующим образом.

Правило 1. Ситуация (i_0, j_0) является седловой точкой игры Γ_A тогда и только тогда, когда элемент $a_{i_0}^{j_0}$ является одновременно наименьшим элементом своей строки и наибольшим элементом своего столбца.

Ясно, что устойчивые в матричной игре ситуации — это и есть ее седловые точки: одностороннее отклонения от седловой точки не выгодно ни одному из игроков.

Теорема 1. (связь седловой точки с ценой игры).

1) Пусть (i_0, j_0) — седловая точка игры Γ_A . Тогда

a) i_0 является максиминной стратегией игрока 1;

b) j_0 является минимаксной стратегией игрока 2;

c) игра Γ_A имеет цену, причем исход в седловой точке совпадает с $a_{i_0}^{j_0} = \nu$.

2) Пусть игра Γ_A имеет цену ν. Тогда любая ситуация (i_0, j_0), где i_0 — максиминная стратегия игрока 1, а j_0 — минимаксная стратегия игрока 2, — является седловой точкой игры Γ_A.

Следствие 1. В матричной игре наличие седловой точки эквивалентно наличию цены игры.

Следствие 2. Исходы в седловых точках матричной игры совпадают между собой и совпадают с ценой игры.

Перейдем теперь — *графоаналитическому методу*, с помощью которого можно находить решение матричной игры, где один из игроков имеет две чистые стратегии. Для игры формата 2 × m платежная матрица имеет вид:

$$A = \begin{matrix} a_1^1 & a_1^j & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^j & a_2^m \end{matrix}$$

Графоаналитический способ применим также к играм, в которых
игрок 2 имеет ровно 2 чистых стратегии (то есть к играм формата n×2)

Поскольку пара $||XY||$ является решением игры Г тогда и только тогда, когда XY и суть оптимальные стратегии соответственно для первого и второго игроков, то достаточно исследовать множество $T_1(\Gamma)$ оптимальных стратегий игрока P_1 и множество $T_2(\Gamma)$ оптимальных стратегий игрока P_2. Мы увидим, что если Г есть игра с матрицей порядка $m \times n$; то $\mathrm{T}_1(\Gamma)$ есть выпуклая оболочка некоторого конечного множества точек m −мерного пространства и, аналогично, $\mathrm{T}_2(\Gamma)$ есть выпуклая оболочка конечного множества точек n-мерного пространства. Таким образом, множества $T_1(\Gamma)$ и $T_2(\Gamma)$ имеют простую геометрическую интерпретацию — они представляют собою многогранники.

Если Г — прямоугольная игра с матрицей порядка $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$, то $\mathrm{T}_1(\Gamma)$ и $\mathrm{T}_2(\Gamma)$ суть непустые ограниченные выпуклые и замкнутые подмножества соответственно m-мерного и n-мерного пространств.

Пусть Г — прямоугольная игра, платежная матрица которой есть A, пусть $\mathrm{v}(\Gamma)$ цена игры, отличная от нуля, $\mathrm{X} \in \mathrm{T}_1(\Gamma)$ и $\mathrm{Y} \in \mathrm{T}_2(\Gamma)$. Тогда, для того чтобы $\mathrm{X} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}_1(\Gamma)]$ и $\mathrm{Y} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}_2(\Gamma)]$, необходимо и достаточно, чтобы существовала невырожденная подматрица B матрицы A такая, что

$$v = \frac{1}{J_r B^{-1} J_r'}, \tag{3}$$

$$\dot{X} = \frac{J_r B^{-1}}{J_r B^{-1} J_r'}, \tag{4}$$

$$\dot{Y} = \frac{J_r (B^{-1})'}{J_r B^{-1} J_r'}, \tag{5}$$

где r есть порядок матрицы B, X — вектор, полученный из X путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым строкам при образовании матрицы Виз матрицы A, а Y есть вектор, полученный из Y путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым столбцам при образовании матрицы B из матрицы A.

Теорема 2.1. Пусть Г—прямоугольная игра с матрицей A.Предположим, что $\mathrm{X} \in \mathrm{T}_1(\Gamma)$ и $\mathrm{Y} \in \mathrm{T}_2(\Gamma)$. Тогда, для того чтобы $\mathrm{X} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}_1(\Gamma)]$ и $\mathrm{Y} \in \mathrm{K}\big[\big(\mathrm{T}_2(\Gamma)\big)\big]$, необходимо и достаточно, чтобы существовала квадратная подматрица B матрицы A порядка r, такая что

$$\mathrm{J_r(adjB)J_r'} \neq \mathrm{O}$$

и

$$\mathrm{v} = \frac{|\mathrm{B}|}{\mathrm{J_r(adjB)J_r'}}, \tag{6}$$

$$\dot{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{J_r adjB}}{\mathrm{J_r(adjB)J_r'}}, \tag{7}$$

$$\dot{\mathrm{Y}} = \frac{\mathrm{J_r(adjB)'}}{\mathrm{J_r(adjB)J_r'}}, \tag{8}$$

где $\dot{\mathrm{X}}$ есть вектор, полученный из X путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым строкам при образовании B из A, а $\dot{\mathrm{Y}}$ есть вектор, полученный из Y путем вычеркивания элементов, соответствующих вычеркнутым столбцам при образовании B из A.

Теорема 2.1 дает нам следующий удобный метод нахождения всех решений прямоугольной игры:

Пусть дана прямоугольная игра с платежной матрицей A, мы рассматриваем поочередно каждую квадратную подматрицу B матрицы A. Для подматрицы B порядка r из формул теоремы 2.1 мы определяем $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ и решаем прежде всего, принадлежат ли $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ множеству S_r.

Если нет, мы отбрасываем эту подматрицу B и переходим к другой квадратной подматрице. Если X и Y оба принадлежат множеству S_r, то мы образуем векторы X и Y, прибавляя к $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ нулевые компоненты, соответствующие строкам и столбцам, вычеркнутым из A для образования B, и определяем действительно ли $X \in T_1(\Gamma)$ и $Y \in \mathrm{T}_2(\Gamma)$. Если нет, мы также отбрасываем B и переходим к другой квадратной подматрице матрицы A . Если да, то $\|XY\|$ есть решение, и, кроме того, на основании теоремы $X \in K[T_1(\Gamma)]$ и $Y \in K[\mathrm{T}_2(\Gamma)]$. Так мы можем определить все элементы множеств $K[T_1(\Gamma)]$ и $K[\mathrm{T}_2(\Gamma)]$ и, следовательно, найти все элементы множеств $\mathrm{T}_1(\Gamma)$ и $\mathrm{T}_2(\Gamma)$, образовав выпуклые линейные комбинации элементов множеств соответственно $K[T_1(\Gamma)]$ и $K[\mathrm{T}_2(\Gamma)]$.

В связи с этим отметим, что нам не следует рассматривать подматрицы первого порядка, так как они определяют решения по формулам теоремы 3.6 тогда и только тогда, когда соответствующие точки являются седловыми точками первоначальной матрицы.

Теорема 2.2 Если Γ — некоторая прямоугольная игра , то множества $K\,[T_1(\Gamma)]$ и $K\,[T_2\,(\Gamma)]$ конечны , а $T_1(\Gamma)$ и $T_2(\Gamma)$ являются соответственно их выпуклыми оболочками ; следовательно, $T_1\,(\Gamma)$ и $T_2\,(\Gamma)$ — многогранники с вершинами в точках , принадлежащих соответственно $K\,[T_1(\Gamma)]$ и $K\,[T_2\,(\Gamma)]$.

Пусть имеются два производителя одного и того же товара, характеризуемые количествами выпускаемой продукции x , i =1,2 , и затратами $\mathbf{c_i}(\mathbf{x_i})$. В этом случае на рынок будет поставлено x = $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$ единиц товара, а прибыль при условии зависимости цены от суммарного предложения товара описывается выражением

$$\mathbf{M_i}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) \;=\; \mathbf{x_i} * \mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{c_i}(\mathbf{x_i}).$$

Примем дополнительные предположения о параметрах модели:

• производственные возможности сторон ограничены, а именно

$$\mathbf{x_i} \in \mathbf{X_i} = \left[\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right], \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$$

• цена линейно зависит от суммарного предложения товара

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} - \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2};$$

• затраты на производство постоянны на выпуск единицы продукции и составляют

$$\mathbf{C_i}(\mathbf{x_i}) = \mathbf{C_i} * \mathbf{x_i},$$

$$\mathbf{C_i} \;= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \;\;, \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}.$$

В случае дуополии для определения наилучших уровней выпуска продукции получаются две оптимизационные задачи

$$\mathbf{M_i}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \mathbf{x_i}(\mathbf{1} - \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x_i} \;\rightarrow\; \mathbf{max}, \text{ где i =1,2.} \quad (2.1)$$

Как видно из (2.1), решение об уровне выпуска одной стороны влияет на прибыль другой стороны - имеет место конфликт интересов. Если бы, например, первой стороне перед принятием решения об объеме производства был известен уровень выпуска продукции $\mathbf{x_2}$ второй стороны, то решение задачи максимизации $\mathbf{M_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$ можно осуществить с назначением выпуска:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x_1}} \mathbf{M_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \mathbf{1} - \mathbf{x_2} - \mathbf{2} * \mathbf{x_1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0},$$

откуда

$$\mathbf{x_1^+} = \frac{\mathbf{1/2 - x_2}}{\mathbf{2}}, \mathbf{M_1}(\mathbf{x_1^+}, \mathbf{x_2}) = \left(\frac{\mathbf{1/2 - x_2}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}. \quad (2.2)$$

Выражение $\mathbf{x_1^+}$ из (2.2) представляет собой наилучший ответ первой стороны на стратегию $\mathbf{x_2}$ второй стороны. Вычисляя подобным способом наилучший ответ $\mathbf{x_2^+}$ второго производителя на стратегию $\mathbf{x_1}$ первого, в силу симметрии задачи, имеем

$$\mathbf{x_2^+} = \frac{\mathbf{1/2 - x_1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{M_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2^+}) = \left(\frac{\mathbf{1/2 - x_1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}. \quad (2.3)$$

Предположим теперь, что производители выбрали такие уровни выпуска продукции $\left(\mathbf{x_1^0}, \mathbf{x_2^0}\right)$, что

$$\mathbf{x_1^0} = \frac{\mathbf{1/2 - x_2^0}}{\mathbf{2}}, \ \mathbf{x_2^0} = \frac{\mathbf{1/2 - x_1^0}}{\mathbf{2}}, \quad (2.4)$$

т.е. стратегия $\mathbf{x_1^0}$ первой стороны является наилучшим ответом на стратегию $\mathbf{x_2^0}$ второй, а стратегия $\mathbf{x_2^0}$ второй стороны - наилучшим ответом на стратегию $\mathbf{x_1^0}$ первой.

Пара стратегий $\left(\boldsymbol{x_1^0}, \boldsymbol{x_2^0}\right)$, удовлетворяющая соотношениям (2.4), называется точкой равновесия Курно (либо точкой равновесия Нэша) дуополиини один из производителей, стремящихся максимизировать прибыль, при выборе стратегий $\left(\mathbf{x_1^0}, \mathbf{x_2^0}\right)$, из (2.4), не заинтересован в их изменении на основании выражений (2.2-2.3). Из соотношений (2.4) следует, что равновесные уровни выпуска продукции и соответствующие им выигрыши составляют)

$$\left(\mathbf{x_1^0}, \mathbf{x_2^0}\right) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right), \ (\mathbf{M_1}\left(\mathbf{x_1^0}, \mathbf{x_2^0}\right), \ \mathbf{M_2}\left(\mathbf{x_1^0}, \mathbf{x_2^0}\right)) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}\right). \quad (2.5)$$

Точка равновесия по Нэшу $\left(\mathbf{x_1^0}, \mathbf{x_2^0}\right)$ в дуополии может быть получена как результат динамического процесса принятия "близоруких" решений, называемого процедурой нащупывания по Курно. Процедура нащупывания начинается из некоторой начальной точки ($\mathbf{x_1}$ (0), $\mathbf{x_2}$ (0)). Предположим, что игроки ходят по очереди, выбирая наилучшие ответы на текущую стратегию партнера в соответствии с (2.2-2.3), первый игрок в нечетные, а второй - в четные моменты времени:

$$\mathbf{x_1(t)} = \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{x_2(t-1)}}{2}, \qquad \mathbf{t = 1, 3, 5...},$$

$$\mathbf{x_2(t)} = \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{x_1(t-1)}}{2}, \quad \mathbf{t = 2, 4, 6...},$$

Пусть, для определенности, ($\mathbf{x_1}$ (0), $\mathbf{x_2}$ (0)) = (0,0). В этом случае последовательность точек $\{\mathbf{x_1(t)}, \mathbf{x_2(t)}$, t= 0,1,2,...} имеет вид

($\mathbf{x_1}$ (0), $\mathbf{x_2}$ (0)) = (0,0),

($\mathbf{x_1}$ (1), $\mathbf{x_2}$ (1)) $= \left(\frac{\frac{1}{2} - \mathbf{x_2(0)}}{2}, \mathbf{x_2(0)}\right) = \left(\frac{1}{4}, \mathbf{0}\right)$,

($\mathbf{x_1}$ (2), $\mathbf{x_2}$ (2)) $= \left(\mathbf{x_1(1)}, \frac{\frac{1}{2} - \mathbf{x_1(1)}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$,

($\mathbf{x_1}$ (3), $\mathbf{x_2}$ (3)) $= \left(\frac{\frac{1}{2} - \mathbf{x_2(2)}}{2}, \mathbf{x_2(2)}\right) = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$ и т.д.

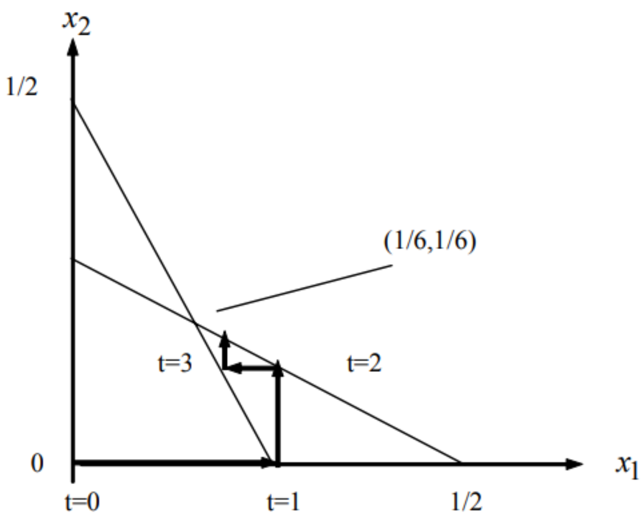

Рис. 1.2. Процедура нащупывания по Курно.

Осуществляя построение других последовательностей, начинающихся из других начальных точек, можно убедиться, что из любой начальной точки последовательности сходятся к точке (1/6, 1/6), являющейся точкой пересечения прямых (4.2-3). К сожалению, процедура нащупывания по Курно не всегда сходится в играх общего вида.

Теорема 2.4 (Теорема Крейна – Мильмана) Любое непустое выпуклое компактное множество C в конечномерном линейном пространстве имеет крайние точки и, более того, совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.

Заключение. В экономике и управлении часто встречаются ситуации, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие различные цели, причем результат, полученный каждой из сторон при реализации определенной стратегии, зависит от действий других сторон. Математическое описание постановок различных задач по принятию решений и математическое обоснование подходов к их анализу и решению помогают лицу, принимающему решение, провести критический анализ ситуации, и в результате более обоснованно и последовательно осуществлять определенную стратегию поведения при решении сложных экономических проблем.