МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интегрирование уравнения Левнера и решение экстремальных задач на множествах его решений

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

направления (специальности) 01.06.01 Математика и механика

Механико-математический факультет

Жердева Андрея Владимировича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Д. В. Прохоров

Саратов 2021

Дифференциальное уравнение Левнера было введено Чарльзом (Карлом) Левнером в 1923 году в работе [1] для изучения свойств однолистных аналитических функций, заданных в единичном круге $\mathbb{D}$, а именно для доказательства гипотезы Бибербаха [2]. Оригинальная идея Левнера заключается в рассмотрении аналитических отображений единичного круга $\mathbb{D}$ на комплексную плоскость с разрезом вдоль некоторой простой кривой (стремящейся к бесконечно удаленной точке, так что ее дополнение в $\mathbb{C}$ является односвязной областью) и описании этих отображений с помощью дифференциального уравнения.

В последние годы возрос интерес к *хордовому* уравнению Левнера для функций, заданных в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. Предположим, что разрез Γ, параметризованный функцией $\gamma(t), t \geq 0$ расположен в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, за исключением начальной точки $\gamma(0)$, лежащей на вещественной оси $\mathbb{R}$. Введем обозначение $\Gamma(t) = \{\gamma(t), t \in [0, t]\}$. Существует единственная конформная функция $g(z,t)$, отображающая область $\mathbb{H} \backslash \Gamma(t)$ на $\mathbb{H}$, такая что в окрестности бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$$g(z,t) = z + \frac{c(t)}{z} + O(|z|^{-2}).$$

Параметризацию кривой $\gamma(t)$ можно выбрать таким образом, что $c(t) = 2t$. Тогда отображения $g(z,t)$ найдется непрерывная вещественная функция $\lambda(t)$, такая что справедливо

$$\frac{dg(z,t)}{dt} = \frac{2}{g(z,t) - \lambda(t)},\ g(z,0) = z,\ t \geq 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) называется хордовым дифференциальным уравнением Левнера. Функция $\lambda(t)$, так же как и в случае с радиальным уравнением Левнера служит управлением в уравнении (1). Заметим также, что $\lambda(t)$ является образом точки $\gamma(t)$ при отображении $g(z,t)$.

Обратно, уравнение Левнера (1) имеет решение для произвольно выбранной непрерывной вещественной функции $\lambda(t)$, которое для каждого фиксированного значения $t \geq 0$ конформно отображает связное подмножество верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ на $\mathbb{H}$, однако указанное подмножество можно представить как верхнюю полуплоскость за исключением некоторой простой кривой Γ, только при “достаточно хорошем” управлении $\lambda(t)$.

Известно лишь несколько управляющих функций, допускающих интегрирование уравнения (1). В работе [3] авторы нашли точные решения уравнения (1) для: $\lambda(t) = ct^\beta$ и $\lambda(t) = c(1-t)^\beta$, где c - вещественная постоянная, $\beta = 0, 1/2, 1$.

В [4] авторы находят решение уравнения Левнера с экспоненциальной управляющей функцией $A(e^t - 1)$.

Обратная задача заключается в отыскании управляющей функции в уравнении Левнера по заданному разрезу в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. Мы отсылаем читателя к работе [5] где такая задача была решена для сегмента окружности в $\mathbb{H}$, касающегося $\mathbb{R}$ в начале координат. Этот результат был обобщен в работе [6] для степеней указанного сегмента, а в работе [7] - для кривых близких к нему. В работе [5] было показано, что сегмент окружности единичного радиуса с центром в точке i соответствует управляющей функции $\lambda(t) = 3\alpha(t) + 2\sqrt{-\alpha(t)\pi}$, где $\alpha = \alpha(t)$ - алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\alpha(3\alpha + 4\sqrt{-\alpha\pi}) = -6t, \quad t \geq 0.$$

Подобная задача для сегмента окружности в $\mathbb{H}$, ортогонального к вещественной оси $\mathbb{R}$ была рассмотрена в работе [8].

Если Γ - множество, представляющее собой объединение простых кривых, то имеет место уравнение

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\mu_k}{g(z,t) - \lambda_k(t)}, \quad g(z,0) = z, \quad 0 \leq t \leq T, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \Gamma[0,T],$$

где $\lambda_k : [0,T] \to \mathbb{R}$ - кусочно-непрерывные управляющие функции, а μ_k, $k = 1, \ldots, n$ - положительными числа, такие что $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$.

Рассмотрим случай когда Γ представляет собой объединение двух ($n = 2$) кривых и $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, мы будем рассматривать уравнение Левнера

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{g(z,t) - \lambda_k(t)}, \quad g(z,0) = z, \quad 0 \le t \le T, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \Gamma[0,T]. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение Левнера (2) с составными управляющими функциями λ_1 и λ_2, $\lambda_1 = -\lambda_2$, когда

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0, \\ A, & t_0 \le t \le T, \end{cases} \tag{3}$$

и

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0, \\ A\sqrt{t - t_0}, & t_0 \le t \le T, \end{cases} \tag{4}$$

для произвольных значений параметров $A > 0$ и $t_0 > 0$ и некоторого $T > t_0$.

В главе 2 доказаны следующие теоремы, в которых уравнение (2) решено для управляющих функций, заданных (3), (4).

Теорема 0.1. Существует $T > t_0$, для которого обобщенное дифференциальное уравнение (2) с управляющими функциями заданными (3) имеет решение $w = g(z,t)$ на $[0,T]$. На интервале $[0,t_0]$, $g(z,t) = \sqrt{z^2 + 4t}$, а на интервале $[t_0,T]$, $w = g(z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$w^2 - z^2 - A^2 \log \frac{w^2}{z^2 + 4t_0} = 4t, \ \ g(z,t_0) = \sqrt{z^2 + 4t_0}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus [0, i2\sqrt{t_0}], \tag{5}$$

где непрерывные ветви логарифма $\log w$ и $\log z$ вещественны при положительных w и z. Функция $g(z,T)$ отображает $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ на $\mathbb{H}$, где Γ есть объединение кривых:

(i) Если $A > 2\sqrt{t_0}$, то $\Gamma = \cup_{k=0}^{2}\Gamma_k$, где $\Gamma_0 = [0, 2i\sqrt{t_0}]$, $\Gamma_2[0,T]$ - кривая, растущая из точки $\sqrt{A^2 - 4t_0}$ и ортогональная вещественной оси $\mathbb{R}$ в этой точке, $\Gamma_1[0,T]$ симметрична $\Gamma_2[0,T]$ относительно мнимой оси;

(ii) Если $A < 2\sqrt{t_0}$, то $\Gamma = \cup_{k=0}^{2}\Gamma_k^*$, где $\Gamma_0^* = \Gamma_0$, $\Gamma_2^*[0,T]$ - кривая, растущая из точки $i\sqrt{4t_0 - A^2}$ и ортогональная мнмой оси в этой точке, $\Gamma_1^*[0,T]$ симметрична $\Gamma_2^*[0,T]$ относительно мнимой оси;

(iii) Если $A = 2\sqrt{t_0}$, то $\Gamma = \cup_{k=0}^{2}\Gamma_k^{**}$, где $\Gamma_0^{**} = \Gamma_0$, $\Gamma_2^{**}[0,T]$ - кривая, рапстущая из начала координат под углом $\frac{\pi}{4}$ к вещественной оси $\mathbb{R}$, $\Gamma_1^{**}[0,T]$ симметрична $\Gamma_2^{**}[0,T]$ относительно мнимой оси.

Теорема 0.2. Для любого $T > t_0$, обобщенное дифференциальное уравнение Левнера (2) с управляющими функциями, заданными (4) имеет решение $w = g(z,t)$ на интервале $[0,T]$. На интервале $[0,t_0]$, $g(z,t) = \sqrt{z^2 + 4t}$, а на интервале $[t_0,T]$, $w = g(z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$(A^2 + 4)(t - t_0) = w^2 - (z^2 + 4t_0)^{\frac{A^2}{4}+1} w^{-\frac{A^2}{2}}, \quad w(z,t_0) = \sqrt{z^2 + 4t_0},$$

где ветви степенных функций выбраны таким образом, что они вещественны и положительны при вещественных и положительных значениях $z^2 + 4t_0$ и w. Функция $g(z,T)$ отображает $\mathbb{H} \setminus \Gamma$ на $\mathbb{H}$, $\Gamma = \cup_{k=0}^{2}\Gamma_k$, где Γ_0 - сегмент $[0, i2\sqrt{t_0}]$, Γ_2 - квадратный корень от линейного сегмента выходящего из точки $(-4t_0)$ под углом $4\pi/(A^2 + 4)$ к вещественной оси $\mathbb{R}$, а Γ_1 симметрична Γ_2 относительно мнимой оси.

Доказательства приведенных теорем основаны на известных случаях интегрируемости уравнения Левнера для постоянной управляющей функции и квадратного корня.

Глава 1 посвящена решению задачи о множестве значений решений хордового уравнения Лёвнера. Задачи отыскания множества значений $\{f(z_0)\}$ для различных классов аналитических функций - одни из типичных задач геометрической теории функций. В приведенном обозначении функция f принимает значения из некоторого заданного класса функций, а z_0 - фиксированная точка из области определения функций этого класса.

Множество задач такого рода было решено для классов аналитических функций, определенных в единичном круге $\mathbb{D}$. Мы упомянем некоторые из этих результатов. Рогозинский в [9] дал описание множества значений $\{f(z_0)\}$ для класса всех аналитических функций, отображающих единичный круг $\mathbb{D}$ в себя, $f(0) = 0$, $f'(0) \geq 0$. Грунский в [10] описал множество значений $\{\log(f(z_0)/z_0) : f \in \mathcal{S}\}$, $z_0 \in \mathbb{D}$ для класса $\mathcal{S}$. Горяйнов и Гутлянский в [11] расширили этот результат описав множество $\{\log(f(z_0)/z_0) : f \in \mathcal{S}_M\}$ для подкласса $\mathcal{S}_M = \{f \in \mathcal{S} : |f| \leq M\}$ класса $\mathcal{S}$ ограниченных функций.

Roth и Schleissinger в [12] описали множества значений $\{f(z_0)\}$ для всех однолистных аналитических функций $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, таким образом, они получили аналог результата Рогозинского для однолистных функций. В той же статье [12] было описано множество значений $\{g(z_0)\}$ для класса однолистных аналитических функций $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, отображающих верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ в себя и нормированных в окрестности бесконечности соотношением $g(z) = z + cz^{-1} + O(|z|^{-2})$, $z \to \infty$. Множества значений для некоторых классов однолистных аналитических функций определенных в единичном круге $\mathbb{D}$ были описаны в [13, 14].

Обозначим $\mathcal{H}(T)$, $T > 0$ - класс всех конформных отображений $g : \mathbb{H} \backslash K \to \mathbb{H}$, нормированных в окрестности бесконечности соотношением $g(z) = z + \frac{2T}{z} + O(|z|^{-2})$. Здесь $K \subset \mathbb{H}$ - так называемый "хал"(hull), это означает что $K = \mathbb{H} \cap \overline{K}$ и $\mathbb{H} \backslash K$ есть односвязная область. Решения хордового уравнения Лёвнера (1), где $\lambda(t)$ - вещественнозначная непрерывная функция (управляющая функция), образуют всюду плотный подкласс в классе $\mathcal{H}(T)$. Таким образом, проблема отыскания множества значений $\{g(z_0) : g \in \mathcal{H}(T)\}$, $z_0 \in \mathbb{H}$, сводится к описанию множества $\{g(z_0, T)\}$ достижимости уравнения (1). Без потери общности можно положить $z_0 = i$. Множество

$$D(T) = \{g(i, T) : g \text{ решение } (1)\}$$

было описано в работе [15] в полярных координатах. Следующая теорема, доказанная в главе 1 дает более простое описание $D(T)$ в декартовых координатах.

Теорема 0.3. Граница области $D(T)$, $T > 0$ может быть задана уравнением

$$2X^2 = \log Y(1 - 4T - Y^2). \tag{6}$$

Продолжая это исследование, мы рассматриваем задачу описания множества значений

$$D_c(T) = \{g(i, T) : g \text{ решение } (1),\ |\lambda(t)| \leq c\},$$

таким образом, мы добавили ограничение $|\lambda(t)| \leq c$. Мы используем методы теории оптимального управления и прицип максимума Понтрягина в качестве основных инструментов для решения указанной задачи (см., например [16, 17]). Доказана следующая теорема.

Теорема 0.4. Пусть $c^2 \geq T - \frac{1-e^{-4}}{4}$, $T \leq \frac{1}{4}$ и пусть кривые $l_1 - l_4$ определены следующим образом:

1. Кривая l_1 задана уравнением (6), $Y \in [1 - 4T, Y_0]$, Y_0 единственное решение уравнения

$$2c^2 \log Y + Y^2 = 1 - 4T,\ c^2 \geq T - \frac{1 - e^{-4}}{4}. \tag{7}$$

2. Кривая l_2 задана решениями (X, Y), $X + iY = z$, $\mu \in [0, 1]$ уравнения

$$z^2 + 1 - 2c(2\mu - 1)(z - i) + 8\mu c^2(\mu - 1) \ln \frac{z + c(2\mu - 1)}{i + c(2\mu - 1)} = 4T. \tag{8}$$

3. Кривая l_3 задана системой

$$\begin{cases} 2p^2 \log \dfrac{Yp}{c} + Y^2 - p^2 = 1 - 4T - c^2, \\ X = -c + p(1 - \log \dfrac{Yp}{c}), \end{cases} \tag{9}$$

где $p \in [c, p_0]$ и

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{(4T + c^2 - 1)^2 + 4c^2} + (4T + c^2 - 1))}. \tag{10}$$

Кривая l_4 симметрична кривой l_3 относительно мнимой оси.

В случае, если уравнение

$$-4pc + \frac{c^2}{p^2} \exp\left(-\frac{4c}{p}\right) - p^2 = 1 - 4T - c^2 \tag{11}$$

имеет два различных решения $p_1 < p_2$ в интервале (c, p_0) мы также определим кривые $l_5 - l_{10}$.

4. Кривая l_5 задана системой (9), $p \in [c, p_1]$. Кривая l_6 симметрична l_5 относительно мнимой оси.

5. Кривая l_7 задана системой

$$\begin{cases} 4cp + (X - c)^2 - Y^2 - 4T = c^2 - 1, \\ -p \log \dfrac{(X - c)Y}{c} = 2c, \end{cases} \tag{12}$$

где $p \in [p_1, p_2]$. Кривая l_8 симметрична l_7 относительно мнимой оси.

6. Кривая l_9 задана системой (9), $p \in [p_2, p_0]$. Кривая l_{10} симметрична l_9 относительно мнимой оси.

Возможны два случая:

(1) $D_c(T)$ ограничена кривыми $l_1, l_2, l_5 - l_{10}$, если (11) имеет два различных решения $p_1 < p_2$ в интервале (c, p_0).

(2) $D_c(T)$ ограничена кривыми $l_1 - l_4$, если (11) имеет не более одного решения в интервале (c, p_0).

В главе 3 параметрический метод Левнера-Куфарева применяется для решения задачи о соотношении конформных радиусов двух неналегающих областей, одна из которых близка к единичному кругу, а вторая является дополнением замыкания первой области в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Пусть Ω - односвязная область в плоскости w, имеющая более одной граничной точки, $w_0 \in \Omega$. Если $w_0 \neq \infty$, то по теореме Римана существует единственная функция $z = g(w)$, нормированная условиями $g(w_0) = 0$, $g'(w_0) = 1$ и конформно отображающая Ω на круг $\mathbb{D}_r$. Радиус указанного круга $r = r(\Omega, w_0)$ называется *конформным радиусом* области Ω в точке w_0. Пусть теперь $\infty \in \Omega$, тогда существует единственная функция $z = g(w)$, регулярная в Ω за исключением точки ∞, в окрестности которой она имеет разложение вида $g(w) = w + c_0 + c_1 w^{-1} + ...$, и однолистно отображающая Ω на область $\{|z| > \frac{1}{r}\}$. В этом случае велечина $r = r(\Omega, \infty)$ называется *конформным радиусом* области Ω в точке ∞.

Пусть B_l, $l = 1, ..., n$ - произвольные односвязные области в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Будем называть эти области *неналегающими*, если они попарно не имеют общих точек $B_l \cap B_k = \emptyset$, $l \neq k$.

Впервые, по-видимому, задачей о произведении конформных радиусов неналегающих областей занимался М. А. Лаврентьев [18]. Он доказал следующее утверждение: если B_1, B_2 - неналегающие односвязные области, $a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$, $a_1 \neq \infty$, $a_2 \neq \infty$, то имеет место неравенство

$$r(B_1, a_1) r(B_2, a_2) \leq |a_2 - a_1|^2.$$

Большое число результатов в задачах о взаимно неналегающих областях получено методом площадей. Отметим следущий результат. Пусть B_0, B_1 - неналегающие односвязные области в расширенной комплексной плоскости, $\infty \in B_0$, $0 \in B_1$. Тогда [19, с. 223] произведение конформных радиусов $r(B_0, \infty) r(B_1, 0)$ не превосходит единицы

$$r(B_0, \infty) r(B_1, 0) \leq 1, \tag{13}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда границами обеих областей B_0, B_1 служит окружность с центром в начале координат, то есть B_1 - круг с центром в начале координат, а B_0 - внешняя по отношению к этому кругу область. Неравенство (13) получено Н. А. Лебедевым [19, с. 223] применением принципа площадей к задаче о неналегающих областях.

Другим подходом к рассмотрению задачи о соотношении конформных радиусов двух неналегающих областей может служить параметрический метод Левнера-Куфарева. Пусть задано однопараметрическое монотонное семейство односвязных областей $\Omega(t)$, $0 \le t < T$ такое, что $\Omega(0) = \mathbb{D}$. Вместе мы будем рассматривать однопараметрическое семейство $\Omega^* = \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{\Omega(t)}$.

Пусть $\Omega(t)$, $0 \le t < T$ - убывающее однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, а функция $f(z,t) = e^{-t}z + \ldots$ - при каждом t конформно отображает единичный круг на $\Omega(t)$, то $f(z,t)$, то $f(z,t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}p(z,t),\ 0 \le t < T,\ z \in \mathbb{D}, \tag{14}$$

где $p(z,t)$ - функция из класса Каратеодори при каждом фиксированном t, $0 \le t < T$, что означает, что $p(z,t)$ регулярна в $\mathbb{D}$ (при каждом фиксированном t, $0 \le t < T$), $p(0,t) = 1$, $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$, $z \in \mathbb{D}$, $0 \le t < T$.

В работе [20] показано, что если в (14) управляющая функция $p(\cdot,t) \in C^2(\overline{\mathbb{D}})$, $0 \le t < T$, $p(z,\cdot)$ непрерывна на $[0,T)$ для любого $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $p(z,t)$, $p'(z,t)$ и $p''(z,t)$ ограничены на $\overline{\mathbb{D}} \times [0,T)$, то для конформного радиуса $r(\Omega^*(0),\infty)$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\ln(r(\Omega^*(0),\infty)) = t + o(t),\ t \to +0. \tag{15}$$

Заметим, что конформный радиус области $\Omega(t)$ здесь равен $r(\Omega(t),0) = e^{-t}$. В главе 3 используя параметрический метод Левнера-Куфарева мы продолжаем асимптотику (15), доказав следующую теорему.

Теорема 0.5. Пусть $\Omega(t)$, $0 \le t < T$ - монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $0 \le t < T$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, ограниченных кривыми $\Gamma(t)$, заданными в полярных координатах (r,ψ) уравнением $r = \gamma(\psi,t) = 1 + \delta(\psi,t)$, $0 \le \psi \le 2\pi$, $0 \le t < T$, где $\delta \in C^{3+\alpha}([0,2\pi] \times [0,T))$, $0 < \alpha < 1$. При этом, пусть конформный радиус $r(\Omega(t),0) = e^t$, если $\Omega(t)$ - возрастающее семейство областей и $r(\Omega(t),0) = e^{-t}$, если $\Omega(t)$ - убывающее семейство областей. Пусть $\Omega^*(t)$ - неограниченная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Gamma(t)$. Тогда для конформного радиуса $r(\Omega^*(t),\infty)$ области $\Omega^*(t)$ справедлива формула

$$\log r(\Omega^*(t),\infty) = ct + \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\dot{\delta}(\varphi,0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi,0)\,d\varphi\right)t^2 + o(t^2),\ t\to+0, \tag{16}$$

где $c=1$, если $\Omega(t)$ - убывающее семейство, $c=-1$, если $\Omega(t)$ - возрастающее семейство.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ РАБОТЫ

1. Zherdev, A. V. An Asymptotic Relation for Conformal Radii of Two Nonoverlapping Domains. // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2018. Vol. 18, no. 3. P. 274–283.
2. Жердев, А. В. соотношении конформных радиусов двух неналегающих областей. Современные проблемы теории функций и ихприложения. Саратов: Научная книга., 2018. С. 129-132.
3. Zherdev, A. V. Value range of solutions to the chordal Loewner equationwith restriction on the driving function. // Probl. Anal. Issues Anal. 2019. Vol. 8(26), no. 2. P. 92–104.
4. Zherdev, A. V. On Value Range of Solutions to the Chordal Loewner Equation. Теория функций ее приложения и смежные вопросы: Материалы четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции (Казань, 7 – 12 сентября 2019 г.). Казань., 2019.
5. Жердев, А. В. О множестве значений решений хордового уравнения Лёвнера. Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. Саратов. 2020.
6. Prokhorov, D. V., Zakharov, A. M. Zherdev, A. V. Solutions of the Loewner equation with combined driving functions.// Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2021. Vol. 21, no. 3. P. 317-325.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Löwner, K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I // Math. Ann. — 1923. — Bd. 89. — S. 103–121.

2. Bieberbach, L. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. // Sitzungsber Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. — 1916. — Bd. 138. — S. 940–955.

3. Kager, W., Nienhuis, B. Kadanoff, L. P. Exact Solutions for Loewner Evolutions. // J. Stat. Phys. — 2004. — Vol. 115. — P. 805–822.

4. Прохоров, Д. В., Захаров, А. М. Интегрируемость частного вида уравнения Лёвнера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2010. — Т. 10, № 2. — С. 19–23.

5. Prokhorov, D., Vasil'ev, A. Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation. // Trends in Mathematics. Analysis and Mathematical Physics. B. Gustafsson and A. Vasil'ev (Eds.). — 2009. — P. 455–463.

6. Lau, K.-S., Wu, H.-H. On tangential slit solution of the Loewner equation. // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2016. — Vol. 41. — P. 681–691.

7. Wu, H.-H., Jiang, Y.-P. Dong, X.-H. Perturbation of the tangential slit by conformal maps. // J. Math. Anal. Appl. — 2018. — Vol. 464, no. 2. — P. 1107–1118.

8. Wu, H.-H. Exact solutions of the Loewner equation. // Anal. Math. Phys. — 2020. — Vol. 10, no. 59.

9. Rogosinski, W. Zum Schwarzen Lemma. // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. — 1934. — Bd. 44. — S. 258–261.

10. Grunsky, H. Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. // Schr. Math. Sem. Inst. Angew. Math. Univ. Berl. — 1932. — Bd. 1. — S. 93–140.

11. Горяйнов, В. В., Гутлянский, В. Я. Об экстремальных задачах в классе S_M // Матем. сб. — 1976. — С. 242—246.

12. Roth, O., Schleissinger, S. Rogosinski's lemma for univalent functions, hyperbolic Archimedean spirals and the Loewner equation. // Bull. Lond. Math. Soc. — 2014. — Vol. 46, no. 5. — P. 1099–1109.

13. Koch, J., Schleissinger, S. Value ranges of univalent self-mappings of the unit disc. // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — Vol. 433, no. 2. — P. 1772–1789.

14. Koch, J., Schleissinger, S. Three value ranges for symmetric self-mappings of the unit disc. // Proc. Amer. Math. Soc. — 2017. — Vol. 145. — P. 1747–1761.

15. Prokhorov, D. V., Samsonova, K. Value range of solutions to the chordal Loewner equation. // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — Vol. 428, no. 2. — P. 910–919.

16. Прохоров, Д. В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций. // Матем. сб. — 1990. — Т. 181, № 12. — С. 1659–1677.

17. Prokhorov, D. V. Reachable Set Methods in Extremal Problems for Univalent Functions. — Saratov Univ., Saratov, 1993. — 228 p.

18. Лаврентьев, М. А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1934. — Т. 5. — С. 159–245.

19. Лебедев, Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. — Москва, 1975. — 336 с.

20. Prokhorov, D. V. Asymptotic conformal welding via Löwner-Kufarev evolution // Comput. Methods Funct. Theory. — 2013. — Vol. 13, no. 1. — P. 37–46.