ФГБОУ ВО «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

На правах рукописи

ЧУМАЧЕНКО СЕРГЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ СПЛАЙНАМИ

01.06.01 Математика и механика

Научный доклад

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор С.Ф. Лукомский

Саратов - 2021

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

В 1986 году французским математиком Ивом Мейером была предложена конструкция всплесков, определяемая через преобразование Фурье.

$$\hat{\varphi}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1]\,; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{\varepsilon+x}{\varepsilon}\right)\right), & x \in [-\varepsilon,0]\,; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{\varepsilon+1-x}{\varepsilon}\right)\right), & x \in [1,1+\varepsilon]\,; \\ 0, & x \notin [-\varepsilon,1+\varepsilon]\,. \end{cases}$$

Одним из важнейших элементов этой конструкции является функция $\nu(x)$, чья задача - получить гладкость высокого порядка на всей числовой прямой. Однако увеличение степени гладкости неизбежно приводит к усложнению вычислительного процесса. В частности, чаще всего для такой задачи используются полиномы степени $2n-1$, где n - требуемая степень гладкости. Коэффициенты полинома находят при помощи решения систем алгебраических уравнений. Однако степень $2n-1$ предполагает дефект сплайна $n-1$, в то время как для решения ряда задач возникает потребность строить сплайны с дефектом 1.

Решение, которое получилось в рамках задачи создания сплайна Мейера с дефектом 1, оказалось самостоятельным, подходящим для создания системы с достаточно широким классом решаемых задач.

Немного расскажем об этих задачах.

Система функций Хаара $\chi = \{\chi_n\} = \chi_{kj}$, где $n = 2^k + j, k \in \mathbb{N}, j \in [0..2^k - 1]$ была построена в 1909 году венгерским математиком Альфредом

Хааром. Определим эту систему следующим образом:

$$\chi_1(t) \equiv 1, \quad \chi_n(t) \equiv \chi_{kj} = \begin{cases} 1, & t \in \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1/2}{2^k}\right), \\ \\ -1, & t \in \left[\frac{j+1/2}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right], \\ \\ 0, & t \notin \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]. \end{cases}$$

Это была первая ортонормированная система со свойством равномерной сходимости в пространстве непрерывных функций. Впоследствии выяснились и другие фундаментальные свойства этой системы, позволяющие решать важные задачи теории функций и функционального анализа.

Введем понятие кратномасштабного анализа.

Определение

Кратномасштабным анализом называется система замкнутых подпространств $\{V_j\}_{j \in Z}$ в гильбертовом пространстве функций $L_2(R)$, которая

1) Расширяющая, то есть каждое следующее пространство содержит предыдущее и не совпадает с ним;

2) Пересечение всех пространств V_j содержит только нулевую функцию (тождественный ноль);

3) Пространство V_j в предельном переходе $j \to \infty$ является всем гильбертовым пространством, то есть $V_\infty = L_2(R)$

4) Каждое следующее есть двоичное сжатие предыдущего, т.е. для любой функции $f(t) \in V_j$ имеем $f(2t) \in V_{j+1}$

5) Существует функция $\varphi \in V_0$, такая что последовательность $\{\varphi(\cdot + n)_{n \in \mathbb{Z}}\}$ образует базис Рисса в V_0

Для системы Хаара $\varphi = \chi_0$, а V_j - пространства функций, постоянных на двоичных интервалах ранга j. Функция φ называется масштабирующей функцией, так как ее целые сдвиги порождают V_0, а двоичные сжатия и растяжения - соответственно V_1 и V_{-1}. Таким образом, построение масштабирующей функции является необходимым условием для построения всего кратномасштабного анализа.

Определение

Системой всплесков на прямой $\mathbb{R}$ называется ортонормированный базис гильбертого пространства $L_2(\mathbb{R})$, состоящий из функций

$$\psi_{j,k}(t) = \{2^{j/2}\psi(2^j t - k)\}_{j,k \in Z}$$

Система Хаара на прямой является всплеском, то есть системой сжатия и сдвигов, образующую систему представлений в каком-либо смысле(например, ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$, как в данном случае). Ее всплеск-функция - $\psi = \chi_1$.

Каждый кратномасштабный анализ порождает систему всплесков

Таким образом, при построении системы всплесков нужно сохранить двоичную структуру аналогично системе Хаара, т.е. пространства $\{V_j\}$ должны образовывать кратномасштабный анализ.

В рамках теории всплесков наиболее интересными являются следующие достоинства системы Хаара:

1) Базисность в основных функциональных пространствах. В частности, уже была отмечена базисность системы Хаара в пространстве непрерывных функций. Так же система Хаара является ортогональным базисом в пространствах L^p при $p > 1$.

2) Локализованность. Все функции системы имеют компактные носители, а длина отрезка, на котором функция Хаара отлична от нуля, стремится к нулю.

3) Двоичная структура.

4) Простота функций системы. Функции системы Хаара определяются как константы, что упрощает вычисление коэффициентов разложения.

Однако, у системы Хаара есть свои изъяны:

5) “Эффект насыщаемости”: система Хаара одинаково приближает функции

разных классов гладкости, а именно с точностью $\frac{C}{n}$. Это ведет к медленной сходимости системы Хаара и, как следствие, к необходимости хранить большое число коэффициентов.

6) Разрывность. Достаточно часто в прикладных задачах возникает необходимость дифференцировать сигнал, причем иногда многократно. Система Хаара не позволяет этого делать, так как не только не является гладкой, но и является разрывной.

Оба недостатка можно устранить, если построить базис из функций, обладающих большим порядком гладкости(непрерывности), чем у системы Хаара.

Система функций Фабера-Шаудера $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ была построена в 1910 году Фабером, а затем переоткрыта Шаудером в 1927 году . Ее можно определить $\Phi_n(x) = \int\limits_0^x \chi(t)dt$. Таким образом,

$$\Phi_n(x) \equiv \int\limits_0^x \chi_{kj} = \begin{cases} 0, t \notin \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right], \\ \\ 1, t = \frac{j+1/2}{2^k}, \\ \\ \text{линейна и непрерывна во всех точках.} \end{cases}$$

Система Фабера-Шаудера так же будет являться базисом в $C[0,1]$. Более того, имеет место следующая оценка:

$$\left|\left|f - S_N(f)\right|\right|_C \leq \omega^2\left(\frac{1}{N}, f\right),$$

$$\text{где } \omega^2(\delta, f) := \sup_{0<h<\delta, h\leq x\leq 1-h} \left|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\right|;$$

Отсюда очевидно, что система Фабера-Шаудера лучше, чем система Хаара, приближает гладкие функции, а так же не является разрывной. Локализованность и двоичную структуру система Фабера-Шаудера “наследует” у системы Хаара.

Однако, необходимо отметить, что система Фабера-Шаудера не является минимальной в пространстве L_2, а значит не является базисом в этом пространстве.

Попытки найти систему, подходящую для решения конкретной задачи в области обработки сигналов, неизбежно столкнутся с противоречивыми требованиями к этой системе. Особенно ярко это заметно на примере пунктов 4 и 6: увеличивая степень гладкости, мы неизбежно усложняем вычисление коэффициентов разложения.

В 1965 году К.М.Шайдуковым была предпринята попытка построить базис в пространстве непрерывных функций, состоящий из дуг парабол. Этот базис состоит из функций следующего вида

$$g_1(x) = (1-x^2)^2, g_2(x) = x^4, 0 \leq x \leq 1,$$
$$g_{sk} = \frac{(x-a)^2(x-c)^2}{(b-a)^2(b-c)^2} \cdot \Theta^2(ax+cx-x^2-ac)$$

где

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{s}{2^k};\ b = \frac{s+1}{2^k};\ c = \frac{s+2}{2^k}\ :\ k \in \mathbb{N}$$

Так же, как и система Фабера-Шаудера, система Шайдукова является переполненной в $L_2(\mathbb{R})$. Однако, в работе приводится доказательство, что система $\{g_n(x)_{n=1}^{\infty}\}$ является базисом в пространстве непрерывных функций. Несмотря на то, что в работе почти все промежуточные оценки были проведены через модуль непрерывности, окончательная оценка не приведена. Это является большим недостатком системы, построенной Шайдуковым, потому что при сложной конструкции системы нельзя говорить о высокой скорости приближения.

В 1947 году Карри и Шонберг построили следующую систему:

Определение

Пусть $t := (t_i)$ - неубывающая последовательность; i-й нормированный сплайн для последовательности узлов t обозначается через $B_{i,k,t}$ и определяется правилом

$$B_{i,k,t} := (t_{i+k} - t_i)\,[t_i, \ldots, t_{i+k}]\,(\cdot - x)_+^{k-1} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

Обозначение $(\cdot - x)_+^{k-1}$ используется для указания того, что разделенная разность от двух переменных взята при фиксированном значении x и рассматривается только как функция от t. Значение искомой разделенной разности, естественно, зависит от выбранного x.

Очевидно, что $B_{i,k,t}$ - функция с компактным носителем, лежащая на интервале $x \in [t_i, t_{i+k}$

Пусть $M_i = \left(\frac{k}{t_{i+k} - t_i}\right) B_i$ Тогда можно вывести следующее свойство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_i dx = 1$$

Теорема

Система $\{B_{i,k,t}\}$ - базис в пространстве кусочно-многочленных функций

На основании этой теоремы Шенберг назвал функции B базисными сплайнами, или B-сплайнами.

Используя B-сплайны, мы можем связать желаемую степень гладкости в точке разрыва с числом узлов в этой точке, выбирая подходящую последовательность узлов t.

Определим следующую функцию рекурсивно:

$$\varphi^{B,2k+1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{B,2k}(t)\chi_{[0,1]}(x-t)dt\varphi^{B,2k}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{B,2k-1}(t)\chi_{[-1,0]}(x-t)dt$$

Функции $\varphi^{B,N}$ являются B-сплайнами порядка N с компактным носителем, при этом $\varphi^{B,2k+1}(x)$ сосредоточена на отрезке $[-k-1, k+1]$, а функция $\varphi^{B,2k}(x)$ - на отрезке $[-k, k+1]$. Целые сдвиги функции φ образуют систему Рисса. Данная система называется всплеском Стремберга, или сплайн-всплеском.

Цели и задачи диссертационной работы

Получение нового типа сплайнов, которые удовлетворяли бы следующим условиям:

1 Являются гладкими аналогами систем Хаара и Фабера-Шаудера.

2 Локализованны.

3 Имеют двоичную структуру.

4 Наличие масштабирующего уравнения базисной функции для построения кратномасштабного анализа.

Научная новизна.

Все основные результаты работы являются новыми и получены автором самостоятельно. Часть результатов получена в нераздельном соавторстве с С.Ф.Лукомским и П.А.Терехиным при равноправном участии сторон. Автору работы принадлежит идея двоичного базисного сплайна, формулировки и доказательства теорем 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.10, 2.11, 2.12. С.Ф.Лукомскому принадлежат формулировки и доказательства лемм 1.1, 1.2. П.А.Терехину принадлежат формулировки и доказательства теорем 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12. В леммах и теоремах, не принадлежащих автору, диссертанту принадлежат основные понятия.

Теоретическая и практическая значимость.

Работа имеет теоретический характер. Полученные в данной диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения нового вида сплайнов и их принципа построения, изучения свойств этих сплайнов, программной реализации интерполяции новыми видами сплайнов, построения вейвлет-всплесков, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов.

Методы исследования.

В диссертации использовались методы теории всплесков, теории ортогональных рядов, методы функционального анализа. Кроме того, мы также используем программное обеспечение «Wolfram Mathematica» для построения сплайнов.

Положения, выносимые на защиту:

1 Получен новый вид сплайнов, названные двоичными базисными сплайнами, имеющие компактный носитель и двоичную структуру. Показано, каким образом строить двоичные базисные сплайны с гладкостью произвольного порядка.

2 Доказана базисность полученного сплайна в пространстве непрерывных функций и найдена оценка сходимости через модули непрерывности.

3 Доказана базисность Рисса производной полученного сплайна в пространстве L_2

4 Доказано, что двоичный базисный сплайн удовлетворяет масштабирующему уравнению

5 Построен неортогональный кратномасштабный анализ с указанием порядка приближения функций из пространств Соболева

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1 XVIII Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения»

2 XVI Всероссийская молодежная школа-конференция “Лобачевские чтения-2016”

3 XIII Международная летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы - 2017», 21 – 27 августа 2017 г., г. Казань.

4 XXIV Международная конференция «Математика. Экономика. Образование» X Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения.» Молодежная школа-конференция по гармоническому анализу.

5 XIX Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения»

6 XX Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения»

7 Современные методы теории функций и смежные проблемы: Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2021 г.)

Публикации.

Содержание диссертации опубликовано в 11 печатных работах, из них 4 статьи [1–4] опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК РФ, или приравненных к ним, а также в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, 7 работ опубликованы в сборниках трудов конференций как тезисы докладов [5–11].

Личный вклад автора.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают личной вклад автора в опубликованные работы.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 81 страница. Библиография включает 34 наименования.

Содержание работы

Во введении описана кратко история возникновения теории всплесков, обоснована актуальность диссертационной темы, поставлены основные цели и задачи диссертации, обоснованы научная новизна и практическая значимость работы, описана методология и сформулированы выносимые на защиту положения, описана структура диссертации.

В первой главе в разделе 1.1 вводится новый тип сплайнов, которые названы двоичными базисными сплайнами.

Введем следующее определение:

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt\ (x \in [0,1])$ – оператор интегрирования, $1_{2^n-1}(x) = (-1)^{bit([2^n x])}$, где bit(y) - количество единиц в битовой записи натурального числа y.

Тогда $\varphi_{n,N}(x) = I^N 1_{2^n-1}(x)\ (x \in [0,1], n, N \in \mathbb{N}, N \leq n)$

Представленная выше конструкция, полученная автором в 2016 году, позднее была заменена на следующую, предложенную С.Ф.Лукомским:

Пусть

$$If(x) = \int\limits_0^x f(t)dt\ (x \in [0,1]) \text{ — оператор интегрирования,} \tag{0.1}$$

$$r_k(x) = \mathrm{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x)) \text{ — функции Радемахера,} \tag{0.2}$$

$$W_{2^{n-1}}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x) \text{ — функции Уолша.} \tag{0.3}$$

Тогда функцию

$$\psi_{n,N}(x) = Q(n,N)I^N W_{2^n-1}(x), (x \in [0,1], n, N \in \mathbb{N}, N \leq n)$$

будем называть двоичным базисным сплайном N-й степени от n-й функции Уолша, где $Q(n,N)$ — нормирующий коэффициент $\psi_{n,N}(x)$.

Название “двоичные базисные сплайны” было выбрано, потому что:

1) Построенная система действительно является сплайнами, при этом дефекта 1, что будет доказано в ходе диссертационной работы.

2) Система строится по двоичной сетке.

3) Потому что является базисом в некоторых функциональных пространствах, в частности по аналогии с традиционными $B-$сплайнами - в пространстве кусочно-многочленных функций.

Кроме упомянутых выше двух определений, существует так же алгоритм конструктивного построения двоичного базисного сплайна:

1) Пусть построена функция $\psi_{n-1,n-1}(x)$

2) Строим функцию $\psi_{n,n-1}(x) = \psi_{n-1,n-1}(2x) - \psi_{n-1,n-1}(2x-1)$

3) Интегрируем $\psi_{n,n-1}(x)$

4) Нормируем в $C[0,1]$, получаем $\psi_{n,n}(x)$

Функция $\psi_{n,N}(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $N-1$ включительно.

Из этого замечания следует, что можно строить двоичные базисные сплайны произвольного порядка гладкости.

В разделе 1.2 а так же доказываются некоторые свойства двоичных базисных сплайнов, в частности выводится формула для нахождения нормирующего коэффициента в пространстве $C[0,1]$

В параграфе 1.3 диссертации доказывается теорема о базисности системы сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим систему

$$\phi_{m,j}(x) = \beta_{n,n}(2^m x - j),\ m \in Z_0,\ j \in [0, 2^m - 1].$$

Пусть $f(x)$ — функция из $C_0[0,1]$. Обозначим:

$$R_0(x) = f(x), \tag{0.4}$$
$$S_0(x) = R_0\left(\frac{0+1/2}{2^0}\right)\phi_{0,0}(x).$$

В общем случае полагаем:

$$S_m(x) = R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\phi_{m,j}(x),\ x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right], \tag{0.5}$$
$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x). \tag{0.6}$$

Немного изменим формулировку определения для модулей непрерывности:

Определение

Пусть

$\omega_f(\delta) = \sup\limits_{0\le h\le\delta}(f(x+h) - f(x)),\ x \in [0, 1-h]$— модуль непрерывности,

$$\omega_f^2(\delta) = \sup_{0\le h\le\delta} (f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)),\ x \in [0, 1-2h]$$

— модуль непрерывности второго порядка(модуль гладкости).

Очевидно, между двумя определениями модуля непрерывности можно сделать линейный переход, но для доказательства следующей теоремы удобнее использовать только что написанную формулировку.

Теорема

$\phi_{m,j}(x)$ - базис в $C[0,1]$. Имеет место следующая оценка через модуль непрерывности:

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{m} S_i(x)\right| \le \omega_f\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right) + \frac{17}{2}\omega_f^2\left(\frac{1}{2^{\frac{m-3}{2}}}\right) + 5\cdot 2^{-\frac{3}{10}(m-1)}||f||_{[0,1]} + 2^{4-\frac{3}{5}m}||f||_{C[0,1]}$$

В четвертой главе первого параграфа обсуждается система, образованная функцией $\varphi_{n,n-1}$ как гладкий аналог системы Хаара, в то время как система, построенная по $\varphi_{n,n}$, мы называем гладким аналогом системы Фабера-Шаудера. Эти две системы связаны между собой: из одной можно получить другую, если проинтегрировать первую или продифференцировать вторую и домножить на нормирующий коэффициент в соответствующем функциональном пространстве.

В главе 3 показано, что $\varphi_{n,n}$, как аналог системы Фабера-Шаудера, образует базис в пространстве $C[0,1]$. В главе 4 доказана следующая теорема

Теорема Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ сплайновая аффинная система $\{\psi_{n,n-1}^{k,j}\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом Рисса.

Как обычно, под системой сжатий и сдвигов функции f с носителем $\operatorname{supp} f \subset [0,1]$ понимаем последовательность функций

$$f^{k,j}(t) = f(2^k t - j)$$

Напомним, что базисом Рисса (или базисом, эквивалентным ортонормированному) называется последовательность $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H, для которой существуют обратимый ограниченный линейный оператор (изоморфизм) $T : H \to H$ и ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства H такие, что $\psi_n = Te_n$ для всех $n = 0, 1, \ldots$. Границами Рисса последовательности $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называются постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для всех $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ выполняются неравенства

$$A\|c\|_2 \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n \right\| \leq B\|c\|_2.$$

Теорема Для всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $c \in \ell^2$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{10}\|c\|_2 \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_{n,n-1}^{k,j} \right\| \leq \frac{19}{10}\|c\|_2.$$

Таким образом, "гладкий Хаар" является базисом Рисса в L_2, а "гладкий Фабер-Шаудер" - базисом в $C[0, 1]$.

Вторая глава посвящена построению кратномасштабного анализа для двоичного базисного сплайна.

В параграфе 2.1 построено масштабирующее уравнение, которому удовлетворяет двоичный базисный сплайн.

Пусть $F_{n,N}(x) = \beta_{n,N}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Теорема

$$F_{n,n}(x) = \frac{1}{2^n} F_{n,n}(2x - 0) + \sum_{t=1}^{2^n - 1} \frac{1}{2^{n-1}} F_{n,n}(2x - t) + \frac{1}{2^n} F_{n,n}(2x - n)$$

В параграфе 2.2 обсуждаются аспекты построения кратномасштабного анализа для двоичного базисного сплайна. Система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна не является системой Рисса и базисом Рисса и не порождает ортогональный кратномасштабный анализ. Тем не менее, возможно построение неортогонального КМА.

Лемма

Определим преобразование Фурье равенством

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-2\pi i \omega x} dx.$$

Тогда

$$\hat{F}_{n,N}(\omega) = 2^{-N\cdot n-N-1} \cdot \left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{N+1} Q(n,N)\left(1-e^{-2\pi i\omega}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{-2^k\pi i\omega}\right).$$

Образуем подпространства

$$V_m = \overline{(2^{\frac{m}{2}}F_{n,n}(2^m x+k)_{k\in Z}}).$$

Теорема Совокупность (V_m), $m \in Z$, образует КМА, т.е. выполнены аксиомы

A1) $V_m \in V_{m+1}$,

A2) $\bigcup\limits_{m\in Z} V_m = L_2(R)$,

A3) $\bigcap\limits_{m\in Z} V_m = 0$.

Чтобы этим КМА было возможно пользоваться, в параграфе 2.3 обсуждается процесс построения приближений пространст Соболева пространствами (V_n).

Определение

Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Выражение

$$[f,g](\omega) \stackrel{df}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\omega+k)\,\overline{g(\omega+k)}$$

называют скобочным произведением.

Определение

Пусть $s > 0$. Множество

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \left\{f \in L_2(\mathbb{R}) : ||f||_{W_2^s(\mathbb{R})} = ||\,(1+|\cdot|)^s\,\hat{f}||_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty\right\}$$

называют пространством Соболева.

Определение

Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})\,, \varphi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m x+k)$. Оператор

$$\beta_m : f \to \sum_{k\in Z}(f,\varphi_{m,k})\,\varphi_{m,k}$$

называют квазиинтерполяционным оператором.

Определение

Оператор β_m доставляет аппроксимацию порядка $t \in \mathbb{R}_+$, если для всех $f \in W_2^t(\mathbb{R})$

$$||f - \beta_m f||_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-mt}).$$

Лемма

Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям

1) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ существенно ограничена,

2) $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t})$,

3) $1 - |\hat{\varphi}|^2 = O(|\cdot|^{2t_0})$.

Тогда β_m доставляет аппроксимацию порядка $t_1 = \min(t, 2t_0)$. Здесь символ $f = O(|\cdot|^t)$ означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|f(x)|}{|x|^t} \leq C$, $C > 0$

Теорема (Теорема о порядке аппроксимации) Оператор β_m, построенный по функции $\varphi_n(x) == C_n F_{n,n}$, где $C_n = \dfrac{2^{\frac{n^2+n}{2}}}{Q(n,n)}$, доставляет аппроксимацию порядка 1.

Таким образом, для любой функции $f \in W_2^1$ $||f - \beta_m||_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-m})$

В заключении сформулированы результаты диссертации

Список литературы

1. *Лукомский С. Ф., Терехин П. А., Чумаченко С. А.* Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем // Матем. заметки. 2018. Т 103, № 6. С. 863–874. DOI: 10.4213/mzm11654

2. *Чумаченко С. А.* Гладкие аппроксимации в C[0,1] /С.А. Чумаченко //Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2020. Т. 20, вып. 3. С. 326–342 DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342

3. *Чумаченко С. А.* Двоичные базисные сплайны в кратномасштабном анализе. / /Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2021, Т. 25, вып. 4. подана в печать

4. *Чумаченко С. А.* Двоичные базисные сплайны в пространстве кусочно-многочленных функций // Математика.Механика. 2021. подана в печать.

5. *Чумаченко С.* Обобщенная функция Мартенса-Терехина. Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й междунар.Сарат. зимней школы. –Саратов. ООО Издательство «Научная книга», 2016. С. 320-322

6. *Чумаченко С. А.* Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера// Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2016. Т. 53. с. 163–164.

7. *Чумаченко С. А.* Двоичные масштабирующие сплайн функции// Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2017. Т. 54. с. 403.

8. *Чумаченко С. А.* Двоичные масштабирующие сплайн функции// XXIV Международная конференция «Математика. Экономика. Образование» X Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения.» Молодежная

школа-конференция по гармоническому анализу. Материалы. Изд-во Фонд науки и образования. Ростов н/д, 2018, с. 16-18.

9. *Чумаченко С.* Двоичные масштабирующие сплайн-функции. Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 19-й междунар.Сарат. зимней школы. –Саратов. ООО Издательство «Научная книга», 2018. С. 342-343

10. *Чумаченко С. А.* О полноте двоичных базисных сплайнов в пространстве L_p . Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20-й междунар.Сарат. зимней школы. – Саратов. ООО Издательство «Научная книга», 2020. С. 463-456.

11. *Чумаченко С. А.* Гладкие аппроксимации в $C[0,1]$. Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2021 г.) Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021.