МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Решение смешанной задачи для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Шентерякова Максима Александровича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор ____________________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________________ С.И. Дудов
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. При решении смешанных задач для уравнений в частных производных методом Фурье при обосновании равномерной сходимости ряда, представляющего решение, и рядов, полученных из него почленным дифференцированием, приходится накладывать завышенные требования на начальные данные задачи. Избежать этой проблемы впервые удалось А.Н. Крылову, предложившему прием, который он назвал методом ускорения сходимости рядов Фурье и им подобных. Этот прием заключался в том, что из исследуемого ряда выделялся ряд простейшего вида с медленной сходимостью, но сумма которого явно вычислялась, следовательно, можно было непосредственно судить о ее гладкости. Оставшийся ряд уже имел достаточно большую скорость сходимости для того, чтобы его можно было продифференцировать почленно нужное число раз, и получающиеся ряды уже равномерно сходились. Развивая прием А.Н. Крылова, В. А. Чернятин изучил ряд смешанных задач (для волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера), так что в результате требования гладкости начальных данных в методе Фурье не имеют никакого завышения и становятся естественными.

Целью данной бакалаврской работы является исследование смешанной задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями. Приводится обоснование применения метода Фурье на основе полученных уточненных асимптотических формул для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи. Использованы идея А.Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и метод контурного интегрирования резольвенты оператора соответствующей спектральной задачи.

Получено классическое решение, позволяющие преобразовать ряд, представляющий формальное решение по методу Фурье, и доказать возможность его почленного дифференцирования. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования.

Данная бакалаврская работа состоит из пяти глав:

1. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций спектральной задачи
2. Идея А.Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье
3. Метод В.А. Чернятина решения смешанной задачи

4. Классическое решение смешанной задачи
5. Написание программы для нахождения резольвенты спектрального оператора

Основное содержание работы. Во введении формулируются цель бакалаврской работы и решаемые задачи.

В первой главе вводятся основные определения, записывается смешанная задача и доказываются теоремы об асимптотике собственных значений и собственных функций соответствующей задачи.

Рассмотрим следующую смешанную задачу с инволюцией:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + q(x)u(1-x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $q(x)$ — комплекснозначная функция из $C^1[0,1]$ такая, что $q(0) = q(1)$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным минимальным требованиям: $\varphi(x) \in C^1[0,1],\ \varphi(0) = \varphi(1),\ \varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Введем оператор L:

$$Ly = l[y] = y'(x) + q(x)y(1-x),\ y(0) = y(1)$$

и рассмотрим соответствующую спектральную задачу $Ly = \lambda y$:

$$y'(x) + q(x)y(1-x) = \lambda y(x), \tag{4}$$

$$y(0) = y(1). \tag{5}$$

Доказаны следующие основные теоремы.

Теорема 3. *Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них справедливы асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = 2n\pi i + O\Big(\frac{1}{n}\Big),\ n = \pm n_0,\ \pm(n_0+1), \dots,$$

где n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число.

Теорема 4. *Для собственных значений λ_n имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = 2n\pi i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n},\ n = \pm n_0,\ \pm(n_0+1), \dots .$$

Теорема 5. *Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = e^{2n\pi ix} + O\Big(\frac{1}{n}\Big),\ n = \pm n_0,\ \pm(n_0+1), \dots,$$

где оценка $O\Big(\ \cdot\ \Big)$ равномерна по $x \in [0,1]$.

Теорема 6. *Для собственных функций $y_n(x)$ оператора L имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = e^{2n\pi ix} + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

где

$$\Omega_{1n}(x) = \frac{1}{n}[b(x)e^{-2n\pi ix} + b(x)e^{2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{-2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{2n\pi ix}],$$
$$\Omega_{2n}(x) = \frac{1}{n}\left[b(x)\int\limits_0^x e^{2n\pi it}q_2'\Big(\frac{x-t}{2}\Big)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{-2n\pi it}q_2'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)dt\right],$$

оценки $O\Big(\ \cdot\ \Big)$ равномерны по $x \in [0,1]$, а через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Во второй главе описывается идея А.Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье.

Если функцию $f(x)$ представить в виде

$$f(x) = F(x) + \eta(x)$$

и выбрать функцию $F(x)$ так, чтобы она имела те же скачки, как и $f(x)$, то разность $\psi(x) = f(x) - F(x)$ представится таким рядом Фурье, порядок коэффициентов которого будет не ниже второго.

Наоборот, если дано разложение некоторой функции в ряд Фурье, то при нахождении суммы этого ряда или при приближенном представлении этой функции первыми членами ряда, вообще говоря, можно взять для достижения одной и той же степени точности тем меньшее число членов, чем их порядок относительно $\frac{1}{n}$ выше.

Такое выделение функции $F(x)$ возможно всегда выполнить таким образом, что остаток $\psi(x)$ представится рядом Фурье, коэффициенты которого будут сколь угодно высокого порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или для проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение которого она найдена, хотя бы сам ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз.

В третьей главе изложена модифицированная процедура обоснования метода Фурье разделения переменных при решении линейных смешанных задач для уравнений в частных производных произвольного порядка с двумя независимыми переменными в случае самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора.

Рассмотрим неоднородное уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными x и t

$$L_x u(x,t) + H_t u(x,t) = f(x,t), \tag{6}$$

где обыкновенные дифференциальные операторы L_x и H_t, определяются формальными выражениями

$$L_x = q_0(x)\frac{\partial^k}{\partial x^k} + q_1(x)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} + \ldots + q_k(x),$$
$$H_t = p_0(t)\frac{\partial^m}{\partial t^m} + p_1(t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \ldots + p_m(t)$$

с переменными коэффициентами, лишь

$$q_0(x),\ p_0(x) \neq 0\ \forall\ (x,t) \in \overline{Q},$$

$\overline{Q}$ — замкнутый прямоугольник.

Однородные граничные условия

$$U_i u(0,t) + V_i u(\pi,t) = 0\ \forall t \in [0,T]\ (i = 1,\ 2, \ldots,\ k), \tag{7}$$

где обыкновенные дифференциальные операторы U_i и V_i определяются формальными выражениями

$$U_i = a_{i0}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} + a_{i1}\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}} + \ldots + a_{i(k-1)},$$
$$V_i = b_{i0}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} + b_{i1}\frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}} + \ldots + b_{i(k-1)}$$

с постоянными коэффициентами. Начальные данные Коши

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = \varphi_j(x),\ (j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m-1), \tag{8}$$

Необходимо найти функцию

$$u(x,t) \in C^{k,m}(\overline{Q}), \tag{9}$$

Относительно коэффициентов дифференциальных операторов L_x и H_t, будем предполагать, что

$$q_s(x) \in C[0, \pi], \tag{10}$$

$$p_r(t) \in C[0, T], \tag{11}$$

где $s = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ k$ и $r = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ m$.

Теорема 10. *Решение $u(x, t)$ смешанной задачи, если оно существует единственно и представляется равномерно сходящимся по x в $\overline{Q}$ рядом Фурье*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x) \tag{12}$$

по ортонормальной на $[0, \pi]$ системе функций $\{y_n(x)\}$ с коэффициентами $T_n(t)$, определяемыми решениями задачи Коши

$$H_t T_n(t) + \lambda_n T_n(t) = F_n(t), \tag{13}$$

$$T_n^{(j)}(0) = \langle \varphi_j, y_n \rangle, \tag{14}$$

где $j = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ m - 1$.

Теорема 11. *Решение смешанной задачи существует тогда и только тогда, когда функции $q_s(x)$, $p_r(t)$, $f(x, t)$ и $\varphi_j(x)$ таковы, что сумма $S(x, t)$ функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x), \tag{15}$$

принадлежит классу

$$S(x, t) \in C^{k,m}(\overline{Q}) \tag{16}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$U_i S(0, t) + V_i S(\pi, t) = 0, \tag{17}$$

где $i = 1,\ 2, \dots,\ k$.

В сравнении со стандартным новый подход к обоснованию метода Фурье имеет два очевидных преимущества:

1) отказ от многократного почленного дифференцирования формального решения $S(x,t)$ в виде ряда (15), что существенно ослабляет условия разрешимости смешанной задачи (6)-(9);

2) предельная форма условий существования классического решения задачи в виде необходимых и достаточных условий разрешимости.

В четвертой главе описывается классическое решение смешанной задачи. По методу Фурье решение задачи, рассматриваемой в данной работе, берется в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda(\varphi))(x) e^{\lambda t} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{(\varphi, z_{-n})}{y_n, z_{-n}} y_n(x) e^{\lambda_n t}, \tag{18}$$

где $r > 0$ фиксировано и таково, что при $|\lambda_n| > r$ все собственные значения простые.

Доказывается теорема для формального решения (18).

Теорема 13. Для формального решения (18) имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_0(x,t) = F(x+t)$ при $F(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $F(x) = F(x+1)$ и $F(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$,

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0)\varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r} \Big[\frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})} y_n(x) e^{\lambda_n t} - (\varphi, e^{2n\pi x}) e^{2n\pi i(x+t)}\Big].$$

Доказывается, что ряд $u_2(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и всем $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Основной результат:

Теорема 15. Если $q(x) \in C^1[0,1],\ q(0) = q(1),\ \varphi(0) = \varphi(1),\ \varphi'(0) = \varphi'(1)$, то классическое решение поставленной задачи существует и имеет вид (18).

В пятой главе реализуется программа для нахождения резольвенты оператора L, при $q(x) \equiv 1$:

$$y'(x) + y(1-x) = \lambda y(x), \quad x \in [0,1],$$

$$y(0) = y(1),$$

где λ — произвольное число.

Нахождение резольвенты оператора L сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} z'(x)_1 + z_2(x) - \lambda z_1(x) = \varphi(x), \\ -z_2'(x) + z_1(x) - \lambda z_2(x) = \varphi(1-x), \end{cases} \tag{19}$$

$$z_1(0) = z_2(0) = \frac{4}{3},$$

где $z_1(x) = y(x),\ z_2(x) = y(1-x)$.

Для решения данной используем метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Выберем шаг $h = 0.1,\ \lambda = -2,\ \varphi(x) = x$.

Общие формулы для решения системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots,\ y_n),\ i = \overline{1,n},\ x \in [a,b]$$

$$x_i = a + ih,$$

$$k_{i1} = hf_i(x_j, y_{1j}, \ldots,\ y_{nj}),$$

$$k_{i2} = hf_i(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + k_{11}/2, \ldots, y_{nj} + k_{n1}/2),$$

$$k_{i3} = hf_i(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + k_{12}/2, \ldots, y_{nj} + k_{n2}/2),$$

$$k_{i4} = hf_i(x_j + h, y_{1j} + k_{13}, \ldots, y_{nj} + k_{n3}),$$

$$yi\ j + 1 = y_{ij} + \frac{k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}}{6}.$$

Точное решение системы (19) имеет вид:

$$z_1(x) = -\frac{1}{3}e^{-\sqrt{3}x}(-3e^{2\sqrt{3}x} + 2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}x} - 3 - 2\sqrt{3}) -$$
$$-\frac{e^{-\sqrt{3}x}(e^{2\sqrt{3}x} - 1)}{2\sqrt{3}} + x - \frac{2}{3}.$$
$$z_2(x) = \frac{e^{-\sqrt{3}x}(e^{2\sqrt{3}x} - 1)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}e^{-\sqrt{3}x}(3e^{2\sqrt{3}x} + 2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}x} + 3 - 2\sqrt{3}) - t + \frac{1}{3}.$$

Погрешность метода составила 0.000035

Заключение. В данной бакалаврской работе, было доказано, что классическое решение задачи (1) – (3) существует и имеет вид (18). При этом функция $\varphi(x)$ удовлетворяет только естественным минимальным требованиям: $\varphi(x) \in C^1[0,1],\ \varphi(0) = \varphi(1),\ \varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Применяя идеи А.Н. Крылова и В.А. Чернятина, мы избежали исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу фурье.

Также была реализована программа для нахождения собственных резольвенты оператора L с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка.