МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«**САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО**»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения
название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Радюшина Вадима Станиславовича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор ____________________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________________ С.И. Дудов
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной выпускной квалификацинной работы бакалавра является ослабление условия гладкости на начальные данные смешанной задачи волнового уравнения.

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных из него почленным дифференцированием нужное число раз. Однако, недостатком такого подхода является требование завышенной гладкости на начальную функцию.

В работе изучается следующая задача:

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,\infty),$$
$$u(0,t) = u_x(0,t) - u_x(1,t) - au(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0,$$

где $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна, a – комплексное число.

Структура работы следующая:

Введение;

1. Метод разделения переменных;
   1.1. Общая схема метода;
2. Асимптотика собственных значений;
3. Классическое решение смешанной задачи;
   3.1. Представление частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом;
   3.2. Исследование формального решения;
4. Численное нахождение собственных значений;
   4.1. Разностный метод;
   4.2. Результаты численного эксперимента;

Заключение;

Список использованных источников;

Приложение А Исходный код программы;

A.1 Главный файл;

A.2 Метод конечных разностей;

A.3 Метод Мюллера.

Во введении формулируются цель работы и решаемая задача.

В первой главе дается общая схема метода Фурье и приводится теорема о собственных значениях и собственных функциях возникающей в процессе решения задачи Штурма-Лиувилля.

Во второй главе доказывается теорема об асимптотике собственных значений.

В третьей главе определяются необходимые понятия и предположения для представления частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом и проводится исследование основной задачи.

В четвертой главе дается описание программы, реализующей нахождение собственных значений задачи Штурма-Лиувилля, и приводятся результаты ее работы.

В приложении А находится исходный код программы.

1 Основное содержание работы

В первой главе приводится общая схема метода Фурье и приводится теорема о собственных значениях и собственных функциях появляющейся в процессе решения задачи Штурма-Лиувилля:

Теорема 1.1. (1) *Краевая задача*

$$-\left(k(x)Y'(x)\right)' + q(x)Y(x) = \lambda p(x)Y(x),\ 0 < x < l,$$
$$h_1 Y'(0) - hY(0) = 0,\ H_1 Y'(l) + HY(l) = 0.$$

имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$. *Все они вещественные и простые, т.е.* $\lambda_n \neq \lambda_k$ *при* $n \neq k$, *причем*

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{T} + O(\frac{1}{n}),\ n \to \infty,$$

где

$$T = \int_0^l \sqrt{\frac{p(\tau)}{k(\tau)}} d\tau.$$

Каждому собственному значению соответствует только одна, с точностью до постоянного множителя, собственная функция $Y_n(x)$.

(2) *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в* $L_{2,p}(0,l)$, *т.е.*

$$\int_0^l Y_n(x)Y_k(x)p(x)dx = 0 \text{ при } n \neq k.$$

Система собственных функций $\{Y_n(x)\}_{n\geq 0}$ *полна в* $L_{2,p}(0,l)$.

(3) *Пусть* $f(x),\ x \in [0,l]$ *– абсолютно непрерывная функция. Тогда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Y_n(x),$$

где
$$a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int\limits_0^l f(x)Y_n(x)p(x)dx,\ \alpha_n = \int\limits_0^l Y_n^2(x)p(x)dx,$$
причем ряд сходится равномерно на $[0,l]$.

Во второй главе доказывается теорема об асимптотике собственных значений:

Теорема 2.1. *Собственные значения дифференциального оператора n-го порядка в интервале $[0,1]$, порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности λ'_k, λ''_k ($k = N, N+1, N+2,\ldots$), где N – некоторое целое число.*

При нечетном $n = 4q-1$,
$$\lambda'_k = (-2k\pi i)^n\left[1 - \frac{n\ln_0\xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{1.1}$$
$$\lambda''_k = (2k\pi i)^n\left[1 + \frac{n\ln_0\xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{1.2}$$
а для нечетного $n = 4q+1$,
$$\lambda'_k = (2k\pi i)^n\left[1 + \frac{n\ln_0\xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{1.3}$$
$$\lambda''_k = (-2k\pi i)^n\left[1 - \frac{n\ln_0\xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{1.4}$$
где θ_0 и θ_1 отличны от нуля и определяются равенством
$$\theta_0+\theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1+s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \ldots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \ldots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2+s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \ldots & \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \ldots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n+s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \ldots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$
$\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – определенные ранее корни уравнения $\theta_0+\theta_1\xi$, отвечающего области S_v с v, соответственно нечетным и четным.

При четном $n = 2\mu$ *и* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$

$$\lambda'_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{1.5}$$

$$\lambda''_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{1.6}$$

где ξ' *и* ξ'' *– корни уравнения*

$$\theta_1 \xi^2 + \theta_0 \xi + \theta_{-1} = 0. \tag{1.7}$$

отвечающего области S_0, *причем верхний знак в* (1.5), (1.6) *соответствует четному, а нижний – нечетному* μ. *Для четного* $n = 2\mu$ *и* $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$

$$\lambda'_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \tag{1.8}$$

$$\lambda''_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \tag{1.9}$$

где ξ *– двойной корень уравнения* (1.7), *отвечающего области* S_0, *а выбор знака в* (1.8), (1.9) *следует производить по такому же правилу как в* (1.5), (1.6).

θ_{-1} *и* θ_1 *отличны от нуля и определяются равенством*

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \dots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & (\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \dots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \dots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & (\alpha_2 + \frac{1}{s}\beta_2)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \dots & \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \dots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & (\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \dots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

Здесь $\ln_0$ *– какое то фиксированное значение натурального логарифма.*

В первых трех случаях все собственные значения, начиная с некоторого, простые, а в четвертом, начиная с некоторого, простые, или двукратные.

В третьей главе определяются необходимые понятия и предположения для представления частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом и проводится исследование основной задачи:

Определение 1.1. *Резольвентой* интегрального оператора A называется следующая оператор-функция:

$$R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1} A,$$

где E – единичный оператор, λ – комплексный параметр. Если оператор $(E - \lambda A)^{-1}$ ограничен, то λ называется *регулярной точкой.* Таким образом, $R_\lambda(A)$ есть оператор-функция, определенная на множестве регулярных точек.

Определение 1.2. Пусть γ – какой-нибудь контур в λ-плоскости, не проходящий через характеристические значения. Оператор

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R_\lambda d\lambda$$

называется *проектором Рисса.*

Теорема 3.2. *Имеет место формула*

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda,$$

где $S_r(f, x) = \sum\limits_{|\lambda_k|<r} (f, \psi_k)\varphi_k$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– системы всех с.п.ф. для* $\lambda_k : |\lambda_k| < r$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– система биортогональная всей системе* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Нумерация* $\{\varphi_k\}$ *идет в порядке возрастания модулей характеристических чисел с учетом кратности.*

Формальное решение исходной задачи

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u(x, t),\ x \in [0, 1],\ t \in [0, \infty), \tag{1.10}$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) - u_x(1, t) - au(1, t) = 0, \tag{1.11}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = 0, \tag{1.12}$$

по методу Фурье возьмем в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_k} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda, \qquad (1.13)$$

Преобразование формального решения с учетом эталонной задачи дается следующей теоремой.

Теорема 3.3. *Для формального решения имеет место формула*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \left(R_\lambda^0 g\right) \cos \rho t d\lambda - \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_k} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \left(R_\lambda^0 g\right) \cos \rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \left(R_\lambda g - R_\lambda^0 g\right) \cos \rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \int\limits_{\widetilde{\gamma}_k} \left(R_\lambda g - R_\lambda^0 g\right) \cos \rho t d\lambda,$$

а $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$.

Используя асимптотику собственных значений и асимптотические формулы для резольвенты из 3-й главы, доказывается, что ряды $u_0(x,t)$ и $u_2(x,t)$ сходятся при любых $x \in [0,1]$, $t \in [0,\infty)$. Следовательно, сходится ряд (1.13). Далее под $u(x,t)$ понимаем его сумму.

Главный результат этой главы и работы в целом дается следующей теоремой:

Теорема 3.10. *Формальное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.10)-(1.12) *есть классическое решение при* $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ *и выполнении условия*

$$\varphi(0) = \varphi'(0) - \varphi'(1) - a\varphi(1) = \varphi''(0) = 0.$$

В четвертой главе дается описание программы, реализующей нахождение собственных значений задачи Штурма-Лиувилля:

С помощью замены y'' на ее разностную аппроксимацию получим вместо дифференциального уравнения систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -y_0 + y_1\left(2 + h^2\left(q_i - \lambda\right)\right) - y_2 &= 0 \\ -y_1 + y_2\left(2 + h^2\left(q_i - \lambda\right)\right) - y_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -y_{N-2} + y_{N-1}\left(2 + h^2\left(q_i - \lambda\right)\right) - y_N &= 0 \end{cases}$$

или, в матричном виде:

$$(A - h^2\lambda E)Y = 0,$$

Чтобы найти собственные значения будем искать корни характеристического многочлена $\det(A - h^2\lambda E)$. Сам многочлен вычисляется с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$D_m(\lambda) = (a_{mm} - \lambda)D_{m-1}(\lambda) - a_{mm-1}a_{m-1m}D_{m-2}(\lambda).$$

Для начала расчета удобно положить $D_{-1}(\lambda) = 0$, $D_0(\lambda) = 1$.

Для нахождения корней характеристического многочлена $\det(A - h^2\lambda E)$ используется метод Мюллера (парабол). Это итерационный метод для решения уравнения $f(x) = 0$. В качетсве следующего приближения берется точка пересечения параболы, проходящей через три точки $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$, и оси x.

Для определения оптимального числа итераций удобно пользоваться приемом Гарвика:

1. Выбирается не очень малое ε;
2. Итерации ведутся до выполнения условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$;
3. Затем итерации продолжаются до тех пор, пока $|x_{k+1} - x_k|$ убывает.

Для примера возьмем задачу Штурма-Лиувилля на отрезке $[0, 1]$ с нулевым потенциалом: $-y'' = \lambda y,\ y(0) = y(1) = 0$. Ее собственные значения есть $\lambda_n = \pi^2 n^2$. Количество узлов сетки $N = 64$.

Таблица 1.1 — Собственные значения задачи $-y'' = \lambda y,\ y(0) = y(1) = 0$

Собственное значение	Приближенное	Точное	Погрешность
λ_1	9.8676227	9.8696044	0.0080227
λ_2	39.4467191	39.4784176	0.0316985
λ_3	88.6660303	88.8264396	0.0703696
λ_4	157.4069829	157.9136704	0.3466170
λ_5	245.5039738	246.7401100	0.9860261

Как видно из таблицы 1.1, первые собственные значения аппроксимируются с хорошей точностью, однако, уже для пятого погрешность близка к 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе было получено классическое решение смешанной задачи волнового уравнения при минимальных требованиях на начальные данные. Для этого был привлечен метод Коши-Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей из метода Фурье. Также была реализована программа для нахождения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.