МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Двукратное разложение по собственным функциям нерегулярного обыкновенного дифференциального пучка операторов второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТА

Студентки 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Бирюковой Ольги Андрееевны

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор ____________ А.П. Хромов

Заведующий кафедрой
зав. каф.,д.ф.-м.н., профессор ____________ С.И. Дудов

Саратов 2021

Введение

Многие вопросы современной математики, механики и физики приводят к необходимости исследовать спектральные свойства несамосопряженных операторов. Спектральный анализ таких операторов включает в себя задачи определения собственных значений, собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций. В частности, исследуют асимптотику спектра, полноту, равносходимость разложений по корневым функциям, возможность разложения в обобщённые ряды Фурье по корневым функциям и т.д. Многие задачи так же приводят к необходимости исследования различных пучков обыкновенных дифференциальных операторов. В нерегулярном случае теорема о разложении представляет трудности, в отличие от случая регулярных пучков.

Большой вклад в создание и развитие теории несамосопряженных операторов, а так же пучков обыкновенных дифференциальных операторов внесли такие известные математики как Д. Д. Биркгоф, А. С. Стеклов, Я. Д. Тамаркин, М.В. Келдыш, А. П. Хромов, А. А. Шкаликов и др.

В данной работе на основе полученных результатов сделан вывод о том, что если корни характеристического уравнения располагаются на одном луче, то для разложимости функции в ряд по собственным функциям пучка $L(\lambda)$ в сильно нерегулярном случае с нераспадающимися краевыми условиями, как и в случае оператора первого порядка, на разлагаемую функцию не требуется условия аналитичности.

Теоретическая часть дипломной работы носит реферативный характер. Была поставлена задача разобрать статью, в которой формулируется и доказывается теорема о двукратном разложении по собственным функциям нерегулярного обыкновенного дифференциально пучка операторов второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями, а также также исследование теоремы о разложении с помощью интерактивного пакета прикладных программ MATLAB.

Целью бакалаврской работы является:

1. Изучение теоретического материала по теории нерегулярных обыкновенных дифференциальных пучков.

2. Разработка численного алгоритма и проведение численного эксперимента.

Данная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников и двух приложений.

Во введении обосновывается актуальность темы работы и формулируется общая цель исследования.

В первом разделе рассматривается постановка задачи и краткая история вопроса.

Во втором разделе вводятся вспомогательные обозначения, определения и результаты.

В третьем разделе приводится формулировка теоремы о двукратном разложении и ее доказательство.

В четвертом разделе рассматриваются следствия из основной теоремы.

В пятом разделе приводится описание численного эксперимента по исследованию теоремы о разложении.

В первом приложении А приводится код программы, написанный в среде MATLAB.

Во втором приложении Б приводится результат программы.

Основное содержание работы

В первом разделе вводится пучок обыкновенных дифференциальных операторов, определяемый дифференциальным выражением и краевыми условия, описывается краткая история вопроса и постановка задачи.

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим квадратичный пучок $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами

$$l(y,\lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y \tag{1}$$

$$U_\nu(y,\lambda := (\alpha_{\nu 1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu 2}y(0)) + (\beta_{\nu 1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu 2}y(1)) = 0, \quad \nu = 1,2. \tag{2}$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in C$.

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения пучка

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2, \tag{3}$$

которые будем называть характеристиками. Предположим, что эти характеристики простые и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что

$$0 < \omega_1 < \omega. \tag{4}$$

Фундаментальная система решений уравнения $l(x,\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$y_1(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \;\; y_2(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}. \tag{5}$$

Для определенности считаем далее при каждом $\nu = 1, 2$, что $\alpha_{\nu 1} \neq 0$ или $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются.

Введем в рассмотрение вектор столбцы W_j и V_j:

$$V_j = \begin{pmatrix} \upsilon_{1j} \\ \upsilon_{2j} \end{pmatrix}, W_j = \begin{pmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \end{pmatrix}, \;\; \nu, j = 1, 2;$$

$$\upsilon_{\nu j} = \frac{U_{\nu 0}(y_j,\lambda)}{\lambda} = \alpha_{\nu 1}\omega_j + \alpha_{\nu 2}, \;\; w_{\nu j} = e^{-\lambda\omega_j}\frac{U_{\nu 1}(y_j,\lambda)}{\lambda} = \beta_{\nu 1}\omega_j + \beta_{\nu 2},$$

и пусть

$$a_{sk} = |W_s, W_k|\,, \; a_{\bar{s}k} = |V_s, W_k|\,, \; a_{s\bar{k}} = |W_s, V_k|\,, \; a_{\bar{s}\bar{k}} = |V_s, V_k|\,, \; s, k = 1, 2.$$

С использованием этих обозначений для характеристического определителя пучка $L(\lambda)$ тогда справедливо представление:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ U_2(y_1,\lambda) & U_2(y_2,\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{12} + \beta_{11}\omega_1 e^{\lambda\omega_1}\beta_{12}e^{\lambda\omega_1} & \alpha_{11}\omega_2 + \alpha_{12} + \beta_{11}\omega_2 e^{\lambda\omega_2}\beta_{12}e^{\lambda\omega_2} \\ \alpha_{21}\omega_1 + \alpha_{22} + \beta_{21}\omega_1 e^{\lambda\omega_1}\beta_{22}e^{\lambda\omega_1} & \alpha_{21}\omega_2 + \alpha_{22} + \beta_{21}\omega_2 e^{\lambda\omega_2}\beta_{22}e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} v_{11} + e^{\lambda\omega_1} w_{11} & v_{12} + e^{\lambda\omega_2} w_{12} \\ v_{21} + e^{\lambda\omega_1} w_{21} & v_{22} + e^{\lambda\omega_2} w_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 |V_1 + e^{\lambda\omega_1} W_1;\, V_2 + e^{\lambda\omega_2} W_2| =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{11} & e^{\lambda\omega_2} w_{12} \\ v_{21} & e^{\lambda\omega_2} w_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_1} w_{11} & v_{12} \\ e^{\lambda\omega_1} w_{21} & v_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_1} w_{11} & e^{\lambda\omega_2} w_{12} \\ e^{\lambda\omega_1} w_{21} & e^{\lambda\omega_2} w_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 (a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} a_{12}) = \lambda^2 \Delta_0(\lambda). \quad (6)$$

Если $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$, то пучок $L(\lambda)$ является регуляреным по Биркгофу и соответствующая ему Грина будет иметь оценку $O(1/\lambda)$ вне окрестностей фиксированного радиуса около собственных значений.

Если $a_{12} = 0$ или $a_{12} = a_{\bar{1}2} = 0$ или симметричный случай: $a_{\bar{1}\bar{2}} = 0$ или $a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{1\bar{2}} = 0$, то функция Грина данного пучка имеет экспоненциальный рост в углах раствора больше или равного π. Такие пучки принято называть сильно нерегулярными.

Рассмотрим задачу нахождения условий на параметры пучка (1), (2) и на вектор-функцию $f = (f_0, f_1)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость f в биортогональный ряд Фурье по собственным функциям этого пучка.

Эта задача интересна только для сильно нерегулярного пучка (1), (2), так как в регулярном случае задача о разложении достаточно просто решается.

Во втором разделе вводятся вспомогательные обозначения, определеения и результаты, а именно леммы, необходимые для доказательства основной теоремы о разложении.

Чтобы сформулировать теорему о разложении в терминах собственных функций пучка $L(\lambda)$, для краткости введем следующие обозначения:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \;\; \alpha_x = \frac{x}{\tau}, \;\; \beta_x = \tau x + \tau + 1, \;\; d_0 := \frac{a_{\bar{1}\bar{2}}}{a_{\bar{1}2}},$$

$$e_1 = \frac{a_{\bar{1}1}}{a_{\bar{1}2}}, \;\; e_2 = \frac{a_{2\bar{2}}}{a}{}_{\bar{1}2}, \;\; \gamma = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)}, \;\; d_x = \frac{d}{dx}.$$

Рассмотрим задачу на собственные значния для пучка $L(\lambda)$, то есть задачу $L(\lambda) = 0$ или подробно

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = 0, \quad U_j(y, \lambda) = 0, \;\; j = 1, 2. \quad (7)$$

Предположим, что всюду далее выполняется условие

$$a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0, \tag{8}$$

и тогда справедливо следующее представление

$$\Delta_0(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} \;(=: \Delta_0^-(\lambda)) = a_{\bar{1}2} e^{\lambda\omega_2}(1 + \frac{a_{\bar{1}\bar{2}}}{a_{\bar{1}2}} e^{-\lambda\omega_2})$$
$$= a_{\bar{1}2} e^{\lambda\omega_2}(1 + d_0 e^{-\lambda\omega_2}) = a_{\bar{1}2} e^{\lambda\omega_2} \Delta_0^+(\lambda), \tag{9}$$

и, следовательно, пучок является сильно нерегулярным.

Из (9) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней

$$\lambda_k = \frac{(2k\pi i + d_0)}{\omega_2}, \; k \in \mathbb{Z},$$

где $d_0 := \ln_0 c_0$.

Определение 1. Те значения λ, для которых краевая задача $L(\lambda)y = 0$ имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями краевой задачи (пучка $L(\lambda)$), а соответствующие им нетривиальные решения y – собственными функциями.

Обозначим $\Lambda := \lambda_k \,|\, k \in Z$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть собственным значением, а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Из формул для собственных значений следует, что в комплексной плоскости существуют кусочно круговые контуры Γ_ν , отстоящие от чисел λ_k на расстояние не меньше некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k и имеют место оценки $c_1\nu <$ дл. $\Gamma_\nu < c_2\nu$, где c_1, c_2 есть некоторые фиксированные константы такие, что $0 < c_1 < c_2 < \infty$. Обозначим через Γ_ν^+ и Γ_ν^- части контура Γ_ν , лежащие в правой и левой комплексных полуплоскостях соответственно.

Линеаризуем задачу (7): положим $z_0 = y, z_1 = \lambda z_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора $\widehat{L}$, но в пространстве вектор-функкkций для $z = (z_0, z_1)^T : \widehat{L}z = \lambda z$, где

$$\widehat{L}z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix} z,$$

$$z \in D_{\widehat{L}} = \left\{ z = (z_0, z_1)^T | z_0', z_1 \in L_1[0,1], U_j(z) = 0, j = 1, 2 \right\}.$$

Определение 2. Пусть λ — собственное значение оператора L, а $y_0(x)$ есть соответствующая собственная функция. Система функций $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ называется цепочкой функций, присоединенных к собственной функции $y_0(x)$, если функции $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_k(x)$ являются решениями следующих задач

$$Ly_q - \lambda y_q = y_{q-1}, \ q = 0, \ldots, k.$$

Пусть $\widehat{R}_\lambda = (\widehat{L} - \lambda \widehat{E})^{-1}$ будет резольвентой оператора $\widehat{L}$ и $f = (f_0, f_1)^T$. Известно, что $-\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\Gamma_\nu} \widehat{R}_\lambda f \, d\lambda$ является частичной суммой разложений вектор-функции f в биортогональный ряд Фурье по собственным векторным функциям оператора $\widehat{L}$, соответствующим тем собственным значениям, которые попали внутрь контура Γ_ν:

$$I := -\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\gamma_\nu} \widehat{R}_\lambda f \, d\lambda.$$

Здесь γ_ν является простым замкнутым контуром, окружающим только одну точку λ_ν.

Будем считать, что $(\widehat{L} - \lambda \widehat{E})^{-1} f = (z_0(x, \lambda; f), z_1(x, \lambda; f))^T$ и пусть

$$I_{s\nu} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\nu} z_s(x, \lambda; f) d\lambda, \ s = 0, 1$$

.

Введем вспомогательные результаты в виде трех лемм, которые в дальнейшем будут использованы при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Если* $f_0', f_1 \in L_1[0,1]$, $\widetilde{f} := -p_2 f_1(x) - p_1 f_0'(x)$ *и*

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0, \tag{10}$$

то

$$z_0(x,\lambda;f)=\Big(-\frac{a_{2\bar{2}}\gamma}{\lambda\Delta_0(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1 x+\omega_2(1-t))}f_\lambda(t)\,dt+$$

$$+\frac{a_{\bar{1}1}\gamma}{\lambda\Delta_0(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2 x)}f_\lambda(t)\,dt-\frac{a_{\bar{1}2}\gamma}{\lambda\Delta_0(\lambda)}\int\limits_0^1 e^{\lambda(\omega_2(1-t)+\omega_2 x)}f_\lambda(t)\,dt\Big)-$$

$$-\Big(\frac{\gamma}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda\omega_1(x-t)}f_\lambda(t)\,dt-\frac{\gamma}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda\omega_2(x-t)}f_\lambda(t)\,dt\Big),\quad (11)$$

$$z_1(x,\lambda;f)=\lambda z_0(x,\lambda;f)+f_0(x),\quad (12)$$

где

$$f_\lambda(x):=\widetilde{f}(x)-\lambda p_2 f_0.\quad (13)$$

Пусть $K_\delta(\lambda_k)$ есть круги радиуса δ с центрами в λ_k и $\mathbb{C}_\delta=\mathbb{C}\setminus(\cup_{k\in\mathbb{Z}}K_\delta(\lambda_k))$. Через $\mathbb{C}_\delta^+$ и $\mathbb{C}_\delta^-$ обозначим части $\mathbb{C}_\delta$, лежащие в правой и левой полуплоскостях.

Лемма 2. *Существует такая положительная константа C_δ, что*

$$\forall\lambda\in\mathbb{C}_\delta^-:\ |\Delta_0^-(\lambda)|\geq C_\delta;\ \ \forall\lambda\in\mathbb{C}_\delta^+:\ |\Delta_0^+(\lambda)|\geq C_\delta.$$

Лемма 3. *Если $\gamma(x,t)=\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 t$ $(\gamma_2\neq 0)$ и $\gamma(x,t)\,Re\lambda\leq 0\ \ \forall\,\lambda\in\Gamma_\nu^+(\Gamma_\nu^-)$ при $x\in[a(x),\,b(x)]$ где $a(x),b(x)$ – заданные линейные функции, $f\in L_p[0,1]$, $p>1$, $\chi_p(\nu)=\nu^{1/p}$ при $1<p<\infty$ и $\chi_\infty=ln\nu$ при $p=\infty$, то*

$$\Big|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+(\Gamma_\nu^-)}\Big(\int\limits_{a(x)}^{b(x)}e^{\gamma(x,t)\lambda}h(t)\,dt\Big)d\lambda\Big|\leq C||h||_p\chi(\nu).$$

В третьем разделе приводится формулировка основной теоремы о разложении и доказывается при помощи введенных ранее обозначений и трех лемм.

Теорема 1. *Если* $f_0'', f_1' \in L_p[0,1], p > 1,$ *и выполняются условия* (4), (8), (10), *то*

$$I_{0\nu}(f) = f_0(x) + \gamma(e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1\omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x)) + \\ + \gamma p_2(e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + F_1(x)) + o(1) \text{ при } \nu \to \infty, \quad (14)$$

$$I_{1\nu}(f) = f_1(x) + \gamma(e_2\omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1\omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x) + \\ + \gamma(e_2 f_0'(\alpha_x) - e_1 f_0'(\beta_x) + f_0'(x)) + o(1) \text{ при } \nu \to \infty, \quad (15)$$

где $F_1(x) = \int\limits_0^x f_1(t)dt$ *и* $o(1) \rightrightarrows 0$ *по* $x \in [0,1]$. *В формулах функции полагаются продолженными нулями, если аргументы выходят за отрезок* $[0,1]$.

В четвертом разделе рассматриваются два следствия из основной теоремы о разложении.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Для того, чтобы имели место формулы при* $\nu \to \infty$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda;f)d\lambda = f_0(x) + o(1), \quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda;f)d\lambda = f_1(x) + o(1), \quad (16)$$

необходимо и достаточно, чтобы функции f_0, f_1 *удовлетворяли системе уравнений:*

$$(e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1\omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x)) - p_2(e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + F_1(x)) = 0, \quad (17)$$

$$(e_2\omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1\omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x)) - p_2(e_2 f_0'(\alpha_x) - e_1 f_0'(\beta_x) + f_0'(x)) = 0. \quad (18)$$

Дифференцируя первое уравнение (ввиду нулевых начальных условиях получим эквивалентное уравнение) и анализируя полученную систему, без труда получим простое условие разложимост вектора $(f_0, f_1)^T$ *по производным цепочкам пучка* $L(\lambda)$.

Следствие 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 и* $e_2 = 0$ *(это эквивалентно условию* $a_{2\overline{2}} = 0$*). Для того, чтобы имели место формулы* (16)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение* $f_0'(x) = \omega_2 f_1(x)$ *для всех* $x \in [0, 1]$.

Из полученных результатов видно, что когда корни характеристического уравнения лежат на одном луче, для разложимости функции в ряд по собственным функкциям пучка $L(\lambda)$ в сильно нерегулярном случае так же, как и в случае оператора первого порядка, не требуется аналитичности разлагаемой функции.

В **пятом разделе** приводится подробное описание численного эксперимента по исследованию теоремы о разложении. Целью построения программы является сравнение точного и численного решения с наперед заданной точностью. Алгоритм программы следующий: Зададим шаг разбиения отрезка, количество разбиений окружности и точность вычислений.

Далее в качестве точного решения используем функции cor0 и cor1, которые в условии теоремы 1 были даны, как $I_{0\nu}(f)$ и $I_{1\nu}(f)$ соответственно. Через функции test0 и test1 обозначены численные решения для соотвествующих интегралов.

Затем, по всем узлам разбиения основого отрезка, считаются значения точного и численного решения. Численное интегрировование, использующееся в программе, происходит по методу Симпсона. После подсчета значений до тех пор, пока разность точного и численного не будет меньше заданной погрешности происходит разбиение окружнсти вокруг собственных значений. В конце программы подсчитывается погрешность между точным и численным решениями.

Заключение

В данной бакалаврской работе рассмотрена задача нахождения условия для параметров пучка $L(\lambda)$ и вектор-функции $f = (f_0, f_1)^T$, для которых имеет место двукратное разложение f в биортогональный ряд Фурье по собственным функциям этого пучка. Так же в процессе выполнения дипломной работы был проведен численный эксперимент для исследования теоремы о двукратном разложении, который показал, что точное и численное решения совпадают с заданной погрешностью или меньше.