МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ОБЛИГАЦИИ. ФОРМИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРФТЕЛЯ ДЖ.ТОБИНА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Хорьковой Дарьи Михайловны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ____________ А. В. Шаталина

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ____________ С. П. Сидоров

Саратов 2021

Введение.

Инвестиции в облигации - наиболее надежное вложение средств на рынке ценных бумаг. Этот инструмент рекомендуется для тех, кому важна полная сохранность капитала с доходом несколько выше, чем по вкладу в банке.

Данная тема весьма актуальна в наши дни, так как в течение многих лет облигации считались достаточно примитивным и негибким способом вложения капитала, способным лишь обеспечить текущий доход и практически ничего сверх того. Однако такое положение сохранялось недолго; сегодня облигации относятся к одному из наиболее конкурентоспособных инвестиционных инструментов, обладающих потенциальными возможностями обеспечения привлекательной доходности в виде текущих процентов и прироста капитала.

Предметом исследования выступает рынок ценных бумаг. Объектом исследования является оптимизация и моделирование составления портфелей ценных бумаг на основе показателей эффективности.

Цель данной работы заключается в рассмотрении основных моделей формирования оптимального портфеля ценных бумаг, которые пользуются популярностью у инвесторов и аналитиков финансового рынка.

Цель вычислительного эксперимента: рассмотреть способы формирования инвестиционных портфелей, провести их оптимизацию, изучить все характеристики данного портфеля и выяснить их зависимость друг от друга.

Структура и содержание бакалаврской работы. Данная работа состоит из теоретической и праактической части.В теоретической части рассматриваются модели оценки облигаций, их классификация, основы портфельного инвестирования, модель оптимального портфеля Дж. Тобина. Практическая часть представляет собой реализацию построения оптимального портфеля по изученным моделям в *Excel* и на языке программирования Python. Список использованных источников содержит 20 наименований, на которые в тексте приведены ссылки.

1 Основное содержание работы

Во введении обосновывается акутальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается парктическая значимость полученных результатов.

В первом разделе приводится основные понятия для формирования инвестиционных порфтелей. Во втором разделе рассматриваются такая разновидность ценных бумаг, как облигации.

Облигации являются долговыми ценными бумагами и выпускаются в обращение государством или корпорациями.

Основными параметрами облигации являются следующие:

1. N – номинальная цена ;
2. P_b - выкупная цена;
3. n – срок облигации (дата погашения);
4. q – купонная процентная ставка;
5. r – полная доходность от облигации;
6. r_m - рыночная доходность;
7. P_m - рыночная цена;
8. P - расчетная цена.

Иногда вместо цены используется такой показатель, как курс облигации (в процентах):

$$K = \frac{P}{N} \cdot 100 \tag{1}$$

Классификация облигаций Для количественного анализа облигаций основное значение имеет классификация по способам выплаты дохода. Доход от облигации состоит из двух частей:

1. проценты, периодически получаемые по купонам;
2. разность между номиналом и ценой приобретения облигации.

По способам выплаты дохода облигации можно подразделить на четыре типа:

1. бессрочные облигации – выплачиваются только проценты, срок выкупа не оговаривается;
2. облигации с нулевым купоном – выплата процентов не предусматрива-

ется (дисконтные облигации);

3. сберегательные облигации – проценты выплачиваются вместе с номиналом в конце срока;
4. облигации общего типа – периодически выплачиваются проценты, а в конце срока номинал (или выкупная цена).

Доходность облигаций можно охарактеризовать несколькими показателями:

1. q – купонная доходность, определяемая при выпуске облигации;
2. r_t - текущая доходность, характеризующая отношение поступлений по купонам к цене приобретения облигации:

$$r_t = \frac{qN}{P_t} \tag{2}$$

3. r – полная доходность (ставка помещения), измеряющая реальную эффективность инвестиций в облигацию (для инвестора) в виде годовой ставки сложных процентов.

Бессрочные облигации

Схема потока платежей по бессрочным облигациям имеет вид (рисунок 1)

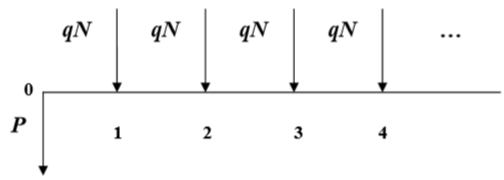

Рисунок 1 – Схема потока платежей бессрочной облигации

Бессрочные облигации - это долговые ценные бумаги без срока погашения. Номинал по ним не погашается. Владельцы таких облигаций будут получать купонный доход всю жизнь.

И так как бессрочная облигация представляет собой бессрочный аннуитет, то ее современная стоимость определяется по формуле:

$$A = C \cdot a_{\infty,r}, \tag{3}$$

где $a_{\infty,r}$ - коэффициент приведения аннуитета, определяемый по формуле:

$$a_{\infty,r} = \lim_{n\to\infty} a_{n,r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = \frac{1}{r},$$

где r - доходность облигации, n - колличество выплат.

Таким образом, если известна рыночная процентная ставка r_m, можно определить расчетную цену облигации по формуле:

$$P = \frac{qN}{r_m}, \tag{4}$$

где r_m - процентная ставка.

Данная формула позволяет решить и обратную задачу: по известному значению рыночной цены P_m определить полную доходность облигации r:

$$r = \frac{qN}{P_m}. \tag{5}$$

Облигации с нулевым купоном

Облигация с нулевым купоном - ценная бумага, по которой купон не оплачивается.

Данный вид облигация обеспечивает ее владельцу в качестве дохода разность между номиналом и ценой приобретения. Схема потока платежей в данном случае имеет вид (рисунок 2):

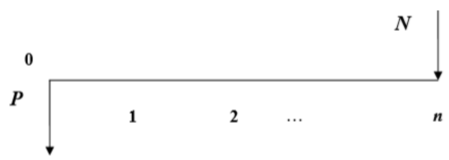

Рисунок 2 – Схема потока платежей облигации с нулевым купоном

Расчетная цена приравнивается к современной стоимости номинала:

$$P = N \cdot V^n, \tag{6}$$

где V^n - дисконт фактор за n периодов, определяемый по формуле:

$$V^n = 1 - d_n = 1 - \frac{r_n}{1+r_n} = \frac{1}{1+r_n}.$$

Сберегательные облигации

Для сберегательной облигации проценты начисляются за весь срок и выплачиваются одной суммой вместе с номиналом. Купонного дохода нет. Схема потока платежей – схема простейшей финансовой операции (рисунок 3):

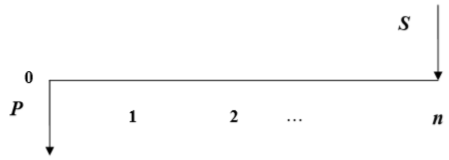

Рисунок 3 – Схема потока платежей сберегательной облигации

На рисунке 3 через S обозначена сумма номинала, наращенная по схеме сложных процентов по купонной ставке q за n периодов:

$$S = N(1+q)^n.$$

Приравняем расчетную цену современной стоимости для суммы S:

$$P = N(1+q)^n \cdot V^n = N\frac{(1+q)^n}{(1+r_m)^n}. \tag{7}$$

Полная доходность, как и в предыдущем случае, определяется по формуле:

$$r = \sqrt[n]{K_n} - 1 = \sqrt[n]{\frac{N(1+q)^n}{P_m}} - 1 = (1+q)\sqrt[n]{\frac{100}{K}} - 1. \tag{8}$$

Облигации общего типа Поток платежей облигации данного типа включает периодически выплачиваемые проценты (купоны), а в конце срока – номинал (или выкупную цену). Схема потока имеет вид (рисунок 4):

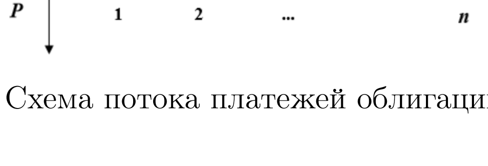

Рисунок 4 – Схема потока платежей облигации общего типа

Поступления по купонам представляют собой постоянную ренту постнумерандо с членом $C = qN$ и современной стоимостью

$$A = C \cdot a_{n,r} = qN \cdot a_{n,r},$$

если купоны оплачиваются ежегодно. Для p - срочных и m - срочных потоков, поступления по купонам определяются выражением вида:

$$A = C \cdot a_{n,r}^{p,m} = qN \cdot a_{n,r}^{p,m},$$

где $a_{n,r}^{p,m}$ - коэффициент приведения (p, m) - срочных рент.

Для определения расчетной цены облигации к современной стоимости купонных поступлений необходимо добавить дисконтированную величину номинала:

$$P = N \cdot V^n + qN \cdot a_{n,r}^{p,m}. \tag{9}$$

Умножим выражение (9) на $\frac{1}{P}$ и получим:

$$\frac{K}{100} = V^n + q \cdot a_{n,r},$$

где $a_{n,r} = \frac{1-V^n}{r}$ - коэффициент приведения аннуитета постнумерандо.

Для определения полной доходности облигации общего типа составляется уравнение:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot V^k = 0.$$

В данном случае оно принимает вид:

$$-P + NV^n + qN \cdot a_{n,r}^{p,m} = 0 \tag{10}$$

и решается одним из итерационных методов относительно r.

В третьем разделе приведена практическая часть, где приведен программный код для формирования и оптимизации инвестиционного портфеля.

Python — высокоуровневый язык программирования. Язык является полностью объектно-ориентированным. Он стал одним из самых популярных языков, также данный язык программирования используется в анализе данных, машинном обучении и веб-разработке, а также в других сферах, включая разработку игр. За счёт читабельности, простого синтаксиса и отсутствия необходимости в компиляции язык хорошо подходит для обучения программированию и будет понятен даже людям, не изучающим программирование.

Jupyter Notebook — это мощный инструмент для разработки и представления проектов Data Science в интерактивном виде. Он объединяет код и вывод все в виде одного документа, содержащего текст, математические уравнения и визуализации. Именно поэтому мной и был использован Jupyter Notebook.

Рассмотрим общую задачу распределения капитала, который участник рынка хочет потратить на приобретение ценных бумаг. Цель инвестора – вложить деньги так, чтобы сохранить свой капитал, а при возможности и нарастить его. В нашем случае, инвестор рассматривает акции 6 различных копманий. Нам известны стоимости данных акций, отмеряемые через каждые 2 месяца в течении года.

Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его портфелем. Стоимость портфеля – это суммарная стоимость всех составляющих его бумаг. Если сегодня его стоимость есть P, а через год она окажется равной P', то $\frac{P'-P}{P}$ мы называем доходностью портфеля в годовых процентах. Доходность портфеля – это доходность на единицу его стоимости.

Пусть x_i – доля капитала, потраченная на покупку ценных бумаг i-го вида. Весь выделенный капитал принимается за единицу. Пусть d_i – доходность в процентах годовых бумаг i-го вида в расчете на одну денежную единицу.

Доходность колеблется во времени, поэтому мы будем считать ее случайной величиной. Через CV_{ij} обозначим ковариацию доходностей ценных бумаг i – го и j – го видов.

Каждый владелец портфеля ценных бумаг сталкивается с проблемой: необходимо иметь эффективность больше, а риск меньше. Однако, это невозможно. Поэтому необходимо сделать определенный выбор между эффективностью и риском. Таким образом, именно по этой причине мы рассматриваем две модели:

1. Портфель Тобина минимального риска

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min \\ x_0 d_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i d_i = d_p \\ x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases} \tag{11}$$

где d_0 – эффективность без рисковых бумаг;

x_0 – доля капитала вложенная в без рисковые бумаги;

x_i,x_j — доля капитала вложенная в ценные бумаги i-го и j–го видов;

d_i – математическое ожидание (среднее арифметическое) доходности i — й ценной бумаги;

V_{ij} – корреляция между эффективностью бумаг i-го и j –го видов.

2. Портфель Тобина максимальной эффективности

$$\begin{cases} x_0 d_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i d_i \to \max \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} = r_p \\ x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases} \tag{12}$$

где d_0 – эффективность без рисковых бумаг;

x_0 – доля капитала вложенная в без рисковые бумаги;

x_i,x_j — доля капитала вложенная в ценные бумаги i-го и j–го видов;

d_i – математическое ожидание (среднее арифметическое) доходности i — й ценной бумаги;

V_{ij} – корреляция между эффективностью бумаг i-го и j –го видов.

Постановка задачи: необходимо загрузить стоимость ценных бумаг за последний год, определить их доходность, риск, ожидаемую доходность, составить ковариационную матрицу, с помощью формул (9.4 - 9.9) определить общий риск и доходность в уже оптимизированном портфеле, определить наиболее доходные ценные бумаги.

Нам необходимо определить x_i. Исходными данными для расчета является матрица доходности ценных бумаг следующей формы (заполненный пример матрицы находится в коде программы):

1	2	...	i	...	n-1	n
			d_{i1} d_{i2} $\dots$ d_{ik} $\dots$ d_{in}			

Для реализации модели минимального риска на Python нужно выполнить следующие этапы разработки:

1. Определение средней доходности акций 1-6:

```
        import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
from sympy import *
D=np.array([[9.889, 11.603,11.612,  12.721,11.453,12.102],
[12.517, 13.25,12.947,12.596,12.853,13.036],
[12.786, 12.822,15.447,14.452,15.143,16.247],
[11.863, 12.114,13.359,13.437,11.913,15.300],
[11.444, 13.292,13.703,11.504,13.406,15.255],
[14.696, 15.946,16.829,17.698,16.051,17.140]],np.float64)

d= np.zeros([6,1])
m,n= D.shape
for j in np.arange(0,n):
         for i in np.arange(0,m):
```

```
                  d[j,0]=d[j,0]+D[i,j]
d=d/

print("Средняя доходность акций 1-6 : \n %s"%d)
```

```
 Программа выводит следующую информацию:
Средняя доходность акций 1-6 :
 [[12.19916667]
 [13.17116667]
 [13.98283333]
 [13.73466667]
 [13.46983333]
 [14.84666667]]
```

2. Далее необходимо построить ковариационную матрицу

```
CV= np.zeros([m,n])
for i in np.arange(0,m):
    for j in np.arange(0,n):
        x=np.array(D[0:m,j]).T
        y=np.array(D[0:m,i]).T
        X = np.vstack((x,y))
        CV[i,j]=round(np.cov(x,y,ddof=0)[1,0],3)
print("Ковариационная матрица CV: \n %s"%CV)
```

Выполнение данной части кода выдаст следующий результат:

```
 Ковариационная матрица CV:
 [[2.117 1.773 2.256 2.347 2.077 1.975]
 [1.773 1.903 1.941 2.049 1.888 1.601]
 [2.256 1.941 2.901 2.787 2.701 2.761]
 [2.347 2.049 2.787 3.935 2.464 2.315]
 [2.077 1.888 2.701 2.464 2.723 2.364]
 [1.975 1.601 2.761 2.315 2.364 3.067]]
```

3. Теперь же определим дисперсию доходности портфеля (функцию риска).

```
x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,p,q,w=symbols(' x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8
  p q w', float = True)
v1 = Matrix([x1,x2,x3,x4,x5,x6])
v2 = v1.T
w=0
for i in np.arange(0,m):
         for j in np.arange(0,n):
         w=w+v1[p.subs({p:i}),q.subs({q:0})]*v2[p.subs({p:0}),
         q.subs({q:j})]*CV[p.subs({p:i}),q.subs({q:j})]
print("Дисперсия доходности портфеля (функция риска):\n%s"%w)
```

4. Далее мы составляем функции для уравнений для (??) - условие для суммы долей и (??) - задание доходности.

```
def constraint1(x):#условие для суммы долей -1
         return x[0]+x[1]+x[2]+x[3]+x[4]+x[5]-1.0+x00
def constraint2(x): # задание доходности
         return d[0,0]*x[0] + d[1,0]*x[1] + d[2,0]*x[2] + d[3,0]*x[3
         +d[4,0]*x[4]+  d[5,0]*x[5] - dp+x00*d0
```

5. И самый важный момент в данной программе - минимизация скалярной функции одной или нескольких переменных. В нашем случае происходит минимизация функции рисков. Минимизация функции происходит с помощью метода наименьших квадратов (метод SLSQP). Причем bounds - граница переменной, которой мы минимизируем

```
sol=minimize(objective,x0,method='SLSQP',\
             bounds=bnds,constraints=cons)# поиск минимума функции р
print("Минимум функции риска : %s"%str(round(sol.fun,3)))
```

В итоге мы получаем, что доходными являются акции 2,4,5,6.

При формировании инвестиционного портфеля методом Тобина допустимыми являются любые портфели, то есть, возможна не только покупка но и продажа ценный бумаг. В связи с этим значения долей акций также могут принимать и отрицательные значения.

Итог работы программы будет выглядеть следующим образом: необходимо в срочном порядке продать 1 и 3 вид ценных бумаг. А остальные облигации, в свою очередь, наоборот, являются прибмльными. Имменно из них и будет состоянть наш инвестиционный портфель.

```
Средняя доходность акций 1-6 :
 [[12.19916667]
 [13.17116667]
 [13.98283333]
 [13.73466667]
 [13.46983333]
 [14.84666667]]
Ковариационная матрица CV:
 [[2.117 1.773 2.256 2.347 2.077 1.975]
 [1.773 1.903 1.941 2.049 1.888 1.601]
 [2.256 1.941 2.901 2.787 2.701 2.761]
 [2.347 2.049 2.787 3.935 2.464 2.315]
 [2.077 1.888 2.701 2.464 2.723 2.364]
 [1.975 1.601 2.761 2.315 2.364 3.067]]
Дисперсия доходности портфеля (функция риска):
2.117*x1**2 + 3.546*x1*x2 + 4.512*x1*x3 + 4.694*x1*x4 + 4.154*x1*x5 + 3.95*x1*x6 + 1.903*x2**2 + 3
776*x2*x5 + 3.202*x2*x6 + 2.901*x3**2 + 5.574*x3*x4 + 5.402*x3*x5 + 5.522*x3*x6 + 3.935*x4**2 + 4.
3*x5**2 + 4.728*x5*x6 + 3.067*x6**2
Минимум функции риска : 0.728
Акция 1 доля- -0.023, доходность:  -0.286
Акция 2 доля- 0.666, доходность:  8.778
Акция 3 доля- -1.0, доходность:  -13.983
Акция 4 доля- 0.079, доходность:  1.089
Акция 5 доля- 0.3, доходность: 4.048
Акция 6 доля- 0.677, доходность:  10.054
```

Заключение.

Метод Дж.Тобина оптимизации инвестиционного портфеля - разновидность модели инвестиционного портфеля Г.Марковица. Данный метод является наглядным и простым в применении. Он позволяет не только построить оптимальный инвестиционный портфель, но и последовательно рассмотреть доход каджой акции, позволяя исключить неприбыльные из портфеля. Но все таки недоставтки у модели Дж. Тобина присутствуют: принебрежение другими экономическими факторами, которык могут значительно влиять как на доходность, так и на риск акций в портфеле.

Были изученны различные инвестиционные стратегии, документы, а так же способы формирования инвестиционных портфелей на языке программирования python и с помощью программы для работы с электронными таблицам - Microsoft Excel.

Таким образом цели, поставленные в начале работы, выполнены.