МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ ДЛЯ САМОФИНАНСИРУЕМЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Плехова Антона Владимировича

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Актуальность работы. Проблема риска – одна из ключевых в экономической деятельности человека. Учет такого фактора, как риск, напрямую отражается на конечном финансовом результате принятого решения. Толкование этого понятия неоднозначно и зависит от конкретной ситуации.

Один из важных видов риска – инвестиционный. Основная связанная с ним задача, которая далее рассматривается, — формирование портфеля ценных бумаг через распределение инвестиционного капитала среди различных ценных бумаг.

Идеальной для инвестора стратегией инвестирования в рамках рассматриваемого подхода была бы стратегия, обеспечивающая достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Однако одновременное достижение этих целей невозможно. Практика работы на финансовых рынках свидетельствует о том, что большему значению ожидаемой доходности обычно сопутствует и большее значение риска вложений.

Выбор портфеля ценных бумаг на основе учета его ожидаемой доходности и риска известен как подход «доходность – риск», который был впервые сформулирован Г. Марковицем. В рамках данного подхода предполагается, что инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при заданном уровне риска, либо минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности посредством диверсификации вложений.

Цель работы – изучение моделей портфельного инвестирования, разработка программного кода в среде AMPL для их реализации и проведение численных экспериментов на реальных данных.

Структура работы. Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения и приложений.

Первый раздел работы, озаглавленный «Оптимальное портфельное инвестирование», посвящен соответствующей оптимизации структуры портфеля ценных бумаг, в том числе при возможности включать в портфель так называемые безрисковые активы. В данной главе рассматривается традиционная модель Марковица, которая была запрограммирована в среде AMPL для получения оптимального портфеля.

В 1952 г. Марковиц опубликовал фундаментальную работу, которая является основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени, который называется периодом владения (holding period). В конце периода владения инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода, после чего либо использует полученный доход на потребление, либо реинвестирует доход в различные ценные бумаги (или делает то и другое одновременно). Таким образом, подход Марковица может быть рассмотрен как дискретный подход, при котором начало периода обозначается $t = 0$, а конец периода обозначается $t = T$. В момент $t = 0$ инвестор должен принять решение о покупке конкретных ценных бумаг, которые будут находиться в его портфеле до момента $t = T$. Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, это решение эквивалентно выбору оптимального портфеля из набора возможных портфелей. Поэтому подобную проблему часто называют проблемой выбора инвестиционного портфеля.

Принимая решение в момент $t = 0$, инвестор должен иметь в виду, что доходность ценных бумаг (и, таким образом, доходность портфеля) в предстоящий период владения неизвестна. Однако инвестор может оценить ожидаемую (или среднюю) доходность (expected returns) различных ценных бумаг, основываясь на некоторых предположениях, а затем инвестировать средства в бумагу с наибольшей ожидаемой доходностью. Марковиц отмечает, что это будет в общем неразумным решением, так как типичный инвестор хотя и желает, чтобы «доходность была высокой», но одновременно хочет, чтобы «доходность была бы настолько определенной, насколько это возможно». Это означает, что инвестор, стремясь одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность (т.е. риск (risk)), имеет две противоречащие друг другу цели, которые должны быть сбалансированы при принятии решения о покупке в момент $t = 0$. Подход Марковица к принятию решения дает возможность адекватно учесть обе эти цели.

В этих условиях задача формирования инвестиционного портфеля становится сложной и трудоемкой. Необходимый аппарат для ее решения предоставляют методы математического программирования. Наиболее распространенный подход к управлению несистематическим риском основывается на описании портфеля характеристиками средней доходности и дисперсии доходности (mean-variance analysis). Оптимальными являются портфели, которые имеют наивысшую доходность при заданном уровне дисперсии и наименьшую дисперсию доходности при заданном уровне риска. Составляющими портфеля могут быть инструменты с фиксированной доходностью и акции. Основоположником рассматриваемого подхода к оптимизации портфелей является нобелевский лауреат Г. Марковиц.

Для того чтобы записать соответствующую постановку оптимизационной задачи, введем следующие обозначения:

— Q — матрица ковариаций $\{q_{ij}\}$ между доходностями финансовых инструментов, $i, j \in I$;
— μ_i — ожидаемая доходность i-го финансового инструмента, $i \in I$;
— μ_p — требуемая средняя доходность портфеля;
— x_i — доля портфеля, состоящая из инструментов i- го типа,$i \in I$.

Формирование портфеля в ситуации, когда разрешены неограниченные заимствования, осуществляется путем решения следующей оптимизационной задачи (M1):

$$\min_{x_i, i \in I} \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} q_{ij} x_i x_j;$$

$$\sum_{i \in I} \mu_i x_i = \mu_p;$$

$$\sum_{i \in I} x_i = 1$$

Критерием оптимизации является дисперсия доходности портфеля. Решение задачи Ml можно получить аналитически путем использования условий оптимальности первого порядка:

$$x^* = \varphi Q^{-1} + \omega Q^{-1} \mu,$$

где

— e — вектор, все компоненты которого равны единице;

— μ — вектор математических ожиданий доходности финансовых инструментов, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_j)^T$;

— φ, ω — множители Лагранжа, соответствующие ограничениям задачи M1.

Если короткие продажи финансовых инструментов не разрешаются, то в задаче Ml добавляются ограничения $x_i \geqslant 0$, $i \in I$. В этом случае для решения оптимизационной задачи используются численные методы.

При наличии безрисковых финансовых инструментов рассмотренная постановка задачи может быть упрощена. Бюджетное ограничение $\sum_{i \in I} x_j = 1$ можно исключить, так как оставшиеся средства всегда могут быть инвестированы в безрисковые инструменты. Кроме того, можно произвести продажу безрисковых инструментов для финансирования инвестиций в другие инструменты. Соответствующая постановка оптимизационной задачи имеет вид(M2):

$$\min_{x_i, i \in I} \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} q_{ij} x_i x_j;$$

$$\sum_{i \in I} (\mu_i - r) x_i = \mu_p - r;$$

где r— доходность безрискового инструмента.

Аналитическое решение задачи M2, записывается в виде $x^* = \varphi Q^{-1}(\mu - re)$, объем инвестиций в безрисковые инструменты составляет $x_0^* = 1 - e' x^*$.

Можно показать, что при использовании безрискового инструмента оптимальный портфель представляет собой комбинацию двух портфелей: оптимального портфеля, составленного из рискованных инструментов, и безрискового инструмента. Различным требуемым доходностям портфеля μ_p соответствует различное распределение вложений между оптимальным портфелем рискованных инструментов и безрисковым инструментом.

Отметим два существенных ограничения оптимизационных моделей M1 и M2. Обе модели контролируют несистематический риск портфеля и не учитывают систематического рыночного риска. Если рассмотреть коэффициент регрессии β_i, i-го финансового инструмента на индекс рынка, то рыночный риск портфеля может быть ограничен путем введения дополнительного условия:

$$\sum_{i \in I} \beta_i x_i = \beta_p,$$

где β_p — требуемая величина регрессии всего портфеля на индекс рынка.

Кроме того, в первом разделе рассматриваются особенности моделирования в среде AMPL. AMPL (аббревиатура от англ. «A Mathematical Programming Language» — «Язык математического программирования») — язык программирования высокого уровня, разработанный в Bell Laboratories, для того, чтобы описывать и решать сложные задачи оптимизации и теории расписаний. AMPL не решает задачи непосредственно, а вызывает соответствующие внешние решатели (типа CPLEX, MINOS, IPOPT, SNOPT и т. д.), для получения решения. AMPL работает с линейными и нелинейными задачами оптимизации с дискретными или непрерывными переменными. Одно из преимуществ AMPL — подобие его синтаксиса математической записи задач оптимизации, что позволяет дать очень краткое и легкочитаемое определение задач математического программирования.

Используя AMPL, мы составили программный код для оптимизационной задачи Марковица М1:

$$\min_{x_i, i \in I} \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} q_{ij} x_i x_j;$$

$$\sum_{i \in I} \mu_i x_i = \mu_p;$$

$$\sum_{i \in I} x_i = 1,$$

который находится в Приложении А. Для работы были взяты данные индексов доходности следующих американских фондовых рынков:

1. US 3-MONTH T-BILLS
2. US GOVN LONG BONDS
3. S&P 500
4. WILSHIRE 5000
5. NASDAQ COMPOSITE

6. LEHMAN BROTHERS CORPORATE BONDS INDEX
7. EAFE
8. GOLD

за период с 1973 по 1994 годы.

Прогнав программу несколько раз, задавая разные значения уровня доходности, мы получили несколько вариантов оптимальных портфелей.

Результаты моделирования приведены в работе в первом разделе. Основываясь на этих результатах, была построена граница эффективных портфелей.

Для сравнения равнораспределенного и оптимизированного портфелей, мы посчитали их доходность с 1991 по 1994 год, с разными значениями уровня доходности. Результаты отображены в таблице 1.

Таблица 1

Значение уровня доходности	Доходность,% годовых	1991	1992	1993	1994
	Равнораспр.портфель	0.955	1.042	1.151	0.993
1.10	Оптим.портфель	1	1.14	1.033	1.104
1.11	Оптим.портфель	0.985	1.11	1.005	1.126
1.11	Оптим.портфель	0.973	1.087	1.036	1.157
1.125	Оптим.портфель	0.851	1.071	0.978	1.171
1.13	Оптим.портфель	0.941	1.075	0.966	1.19
1.135	Оптим.портфель	0.886	1.075	0.906	1.198
1.14	Оптимизированный портфель	0.903	1.078	0.93	1.241

Из таблицы 1 мы видим, что оптимизированный портфель лишь в некоторых случаях обладает меньшей доходностью, чем равнораспределенный. Это объясняется тем, что задав средний уровень доходности оптимизированного портфеля можно свести риск к минимуму и определить наиболее удовлетворяющий требованиям набор активов. В данном случае просматривается тенденция только для 1993 года, когда равнораспределенный портфель был бы предпочтительнее оптимизированного. Из полученных данных также видно, что наилучшим вариантом являются оптимизированные портфели со средним значением уровня доходности 1.10-1.11.

Второй раздел работы, озагравленный «Самофинансируемые портфели», посвящен следующей оптимизационной задаче. Для того чтобы записать ее постановку, введем следующие обозначения:

— Q — матрица ковариаций $\{q_{ij}\}$ между доходностями финансовых инструментов, $i, j \in I$;

— μ_i — ожидаемая доходность i-го финансового инструмента, $i \in I$;

— μ_p — требуемая средняя доходность портфеля;

— x_i — доля портфеля, состоящая из инструментов i- го типа,$i \in I$.

Рассмотрим две модели самофинансируемых портфелей:

A1)

$$\min_{x_i, i\in I} \frac{1}{2} \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} q_{ij} x_i x_j;$$

$$\sum_{i\in I} \mu_i x_i = \mu_p;$$

$$\sum_{i\in I} x_i = 0,$$

A2)

$$\min_{x_i, i\in I} \frac{1}{2} \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} q_{ij} x_i x_j;$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j\in I} q_{ij} x_i x_j \leq \sigma_0;$$

$$\sum_{i\in I} x_i = 0,$$

В отличии от модели Марковица, для модели самофинансируемых портфелей $\sum_{i\in I} x_i = 0$, при этом допускаются короткие продажи.

Предположим, существует p-видов активов, $S = (s_1, \ldots, s_p)^T$, доходность которых $r = (r_1, \ldots, r_p)^T$ со средним значением $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^T$ и матрицей ковариации $Q = \{q_i j\}$. Кроме того, мы полагаем, что инвестор инвестирует капитал C в p- видов активов S так, чтобы:

1. минимизировать риск для заданного уровня ожидаемого дохода, или
2. максимизировать доход, для заданного уровня риска.

Так как две вышеуказанные задачи эквивалентны, в данной работе мы ищем решение только первой из них. Чтобы получить портфель самофинансирования, мы выбираем $C = 0$. Обозначим план инвестирования (или распределения акций) $c = (c_1, \ldots, c_p)^T$, мы имеем $\sum_{i=1}^{p} [c_i] = C = 0$. Также желаемый доход R будет равен $c^T\mu$ с риском c^TQc . В данной работе мы в дальнейшем принимаем, что короткая продажа допускается, и, следовательно, любой компонент c может быть отрицательным. Таким образом, вышеуказанная проблема максимизации может быть переформулирована следующим образом:

$$R = c^T\mu \to \max_c, \tag{1}$$

при ограничении

$$c^T = 0, c^TQc \leq \sigma_0^2 \tag{2}$$

где 1 представляет собой вектор, который своей длиной соответствует правилам матричной алгебры и σ_0^2 – заданный уровень риска. Мы называем R, удовлетворяющее решению задачи (1) –(2), оптимальным доходом, и решение c – оптимальным портфелем самофинансирования. Решение задачи (A1) получено в следующей теореме.

Теорема 1. *В задаче оптимизации* (1) –(2) *оптимальный доход R , и соответствующий оптимальный портфель самофинансирования c, равны*

$$R = \sigma_0\sqrt{\mu^TQ^{-1}\mu - \frac{(1^TQ^{-1}\mu)^2}{1^TQ^{-1}1}}$$

И (4)

$$c = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\mu^TQ^{-1}\mu - (1^TQ^{-1})^2/(1^TQ^{-1}1)}} \times (Q^{-1}\mu - \frac{1^TQ^{-1}\mu}{1^TQ^{-1}1}Q^{-1}1)$$

Основываясь на традиционной модели Марковица, была написана программа для следующей задачи:

$$\max_{x_i, i\in I} \sum_{i\in I} \mu_i x_i$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} q_{ij}x_ix_j \leq \sigma_0$$

$$\sum_{i \in I} x_i = 0$$

В программу был добавлен заемный капитал банка и разрешены короткие продажи. Разработан программный код. Данные для работы остались теми же, кроме добавленного к ним банковского займа:

1. US 3-MONTH T-BILLS
2. US GOVN LONG BONDS
3. S&P 500
4. WILSHIRE 5000
5. NASDAQ COMPOSITE
6. LEHMAN BROTHERS CORPORATE BONDS INDEX
7. EAFE
8. GOLD
9. BANK LOAN

за период с 1973 по 1994 годы.

После многократных запусков программы для разных значений уровня риска, мы получили несколько вариантов оптимальных самофинансируемых портфелей. В результате мы получили требуемую информацию о том, сколько нужно взять в долг у банка, и как распределить этот займ между активами для создания оптимального самофинансируемого портфеля. Результаты моделирования самофинансируемых портфелей приведены в работе. Основываясь на этих результатах, была построена граница эффективных портфелей.

В третьем разделе работы «Модели, основанные на одной мере риска» рассмотрены несколько моделей, использующих различные меры риска.

Четвертый раздел «Смешанные модели, использующие несколько мер риска» содержит описание модели Mean–Variance–Skewness, которая основана на использовании следующих критериев: математического ожидания, дисперсии и асимметрии доходности портфеля.

Программны код и результаты работы приведены в приложениях.