МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Евдокимовой Елены Андреевны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент ______________ С. С. Волосивец

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2021

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В последние годы использование теории игр для принятия стратегических решений в российских компаниях стало очень популярным. Однако очень мало исследований проведено для определения эффективности такого использования. Актуальность темы обусловлена возрастанием интереса к теории игр как инструменту принятия стратегических решений в российских компаниях при повышении уровня конкуренции на рынке в условиях риска и неопределенности, что предполагает оптимальность и эффективность принятия решения на математической основе.

Целью бакалаврской работы является:

1. Изучение теоретических положений по бесконечным антагонистическим играм;
2. Решение и создание программного кода задачи.

Объект исследования - бесконечные антагонистические игры.

Предмет исследования - значение игры, оптимальные стратегии игроков и математическое ожидание выигрыша игрока.

Для достижения целей поставленных в работе необходимо решить следующие **задачи:**

1. Изучить теоретический материал;
2. Отобрать задачу для практической реализации;
3. Разработать алгоритмы решения задачи;
4. Программно реализовать отобранную задачу на языке Java.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, шести разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель бакалаврской работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость исследования.

В первой главе рассматриваем вводную информацию, а именно основные понятия теории игр.

Теория игр - это раздел математики, в котором исследуются и вырабатываются оптимальные правила (стратегии) поведения для каждого из участников конфликтной ситуации.

Идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц, интересы которых различны, что и порождает конфликтную ситуацию называется игрой. А сами лица называются игроками.

В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры можно разделить на следующие основные группы:

— *комбинаторные игры*;

— *азартные игры*;

— *стратегические игры.*

В теории игр существуют два направления:

1. Теория кооперативных игр
2. Теория некооперативных игр.

Если имеются двое игроков, интересы которых являются противоположными, то такая игра называется антагонистической.

Во второй главе приводим в рассмотрение элементы теории игр, решение игр и смешанные стратегии.

Элементы s и t множеств S и T называются стратегиями соответственно игрока I и игрока II. Функциями φ носит наименование *функции выигрыша*, а ее значение называется *выигрышем.*

Игру Г с множествами стратегий S и T и функцией выигрыша φ будем обозначать через $(S, T; \varphi)$.

Если множества S и T конечны, то, выигрыш φ можно представить в виде матрицы. В связи с этим такие игры будут называться *матричными.*

Игру, в которой стратегии и выигрыш обобщены подобным образом, мы будем называть *расширенной* и обозначим ее $\langle\Gamma\rangle = (\langle S\rangle, \langle T\rangle, \varphi)$.

В случае матричных игр для смешанных стратегий удобно ввести специальные обозначения. Пусть S и T состоят соответственно из m и n стратегий и перенумерованы в некотором порядке: $s_1, \cdots, s_m$ и $t_1, \cdots, t_n$; выигрыш $\varphi(s_i, t_j)$ пусть обозначен через a_{ij}. Тогда смешанная стратегия игрока I задается m - мерным вектором $x = (\xi_1, \cdots, \xi_m)$, где ξ_i есть вероятность выбора s_i для I (таким образом, $\xi_i \geqslant 0$ и $\sum \xi_i = 1$). Аналогично, смешанной стратегией

II является n - мерный вектор $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$с соответствующей интерпретацией. Формула для среднего выигрыша теперь такова

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \xi_i a_{ij} \eta_j = xAy,$$

где A – матрица выигрышей.

В третьей главе переходим к рассмотрению бесконечных игр. Бесконечная антагонистическая игра, так же как и конечная, задается тройкой $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$, где x — множество чистых стратегий игрока I, y — множество чистых стратегий игрока II, H — функция выигрыша. Единственное отличие бесконечных антагонистических игр от конечных состоит в том, что в бесконечной игре хотя бы один из игроков имеет бесконечное множество чистых стратегий [1]. Поэтому в этих играх игроки могут следовать принципам оптимальности. Однако эти принципы здесь реализуются уже не всегда. Первая трудность заключается в конструировании смешанного расширения игры.

Определение 1. *Тройка $\Gamma = \langle X, Y, H \rangle$, где $H(X, Y), X \in X.Y \in Y$ — — математическое ожидание выигрыша игрока I, равное*

$$H(X, Y) = \int\limits_x \int\limits_y H(x, y) dx(x) dY(y),$$

называется смешанным расширением бесконечной антагонистической игры.

Определение 2. *Стратегия игрока в бесконечной антагонистической игре называется оптимальной, если существует стратегия другого игрока, в паре с которой она образует ситуацию равновесия.*

Тройку (X^*, Y^*, v), где X^* и Y^* — оптимальные стратегии игроков в игре Γ, а v — ее значение, будем называть решением игры.

Определение 3. *Стратегия $X^* \in X$ называется максиминной стратеги-*

[1]Заметим, впрочем, это если хотя бы один из игроков имеет конечное число стратегий, то исследование игры существенно упрощается.

ей в игре Γ, *если*

$$\inf_Y H(X^*, Y) = \max_X \inf_Y H(X, Y). \qquad (1)$$

Стратегия $Y^* \in Y$ *называется минимаксной стратегией в игре* Γ, *если*

$$\sup_X H(X^*, Y) = \min_Y \sup_X H(X, Y). \qquad (2)$$

Определение 4. *Стратегия* $X^* \in X$ *называется оптимальной, если* $\exists Y^* \in Y$, *т. что* $H(X, Y^*) \leqslant H(X^*, Y^*) \leqslant H(X^*, Y)$ $\forall X \in X, Y \in Y$

Теорема 1. *Если игра* Γ *имеет значение, игроки — оптимальные стратегии, то множество всех ситуаций равновесия является прямым произведением множества оптимальных стратегий первого игрока на множество оптимальных стратегий второго игрока; множество оптимальных стратегий первого игрока равно множеству его максиминных стратегий, а множество оптимальных стратегий второго игрока равно множеству его минимаксных стратегий в игре* Γ*; выигрыши во всех ситуациях равновесия одинаковы и равны значению игры.*

Определение 5. *Пара* $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ *называется ситуацией* ε*-равновесия в игре* $\Gamma =< x, y, H >$, *если*

$$H(X, Y_\varepsilon) - \varepsilon \leqslant H(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) \leqslant H(X_\varepsilon, Y) + \varepsilon. \qquad (3)$$

Стратегии X_ε *и* Y_ε *называются* ε*-оптимальными стратегиями игроков.*

Теорема 2. *Игра* Γ *имеет ситуацию* ε*-равновесия для любого* $\varepsilon > 0$ *в том и только в том случае, когда существует ее значение.*

В четвертой главе определяются свойства решений бесконечных антагонистических игр.

Определение 6. *Стратегия* $X^1 \in X$ *игрока I строго доминирует стратегию* $X^2 \in X$, *если*

$$H(X^1, y) > H(X^2, y), \ y \in y. \qquad (4)$$

Стратегия X^2 называется строго доминируемой.

Определение 7. *Стратегия $Y^2 \in Y$ игрока II строго доминирует стратегию $Y^2 \in Y$, если*

$$H(x, Y^1) < H(x, Y^2),\ x \in x. \tag{5}$$

Стратегия Y^2 называется строго доминируемой.

Когда неравенства (4) не являются строгими, говорят, что стратегия X^1 доминирует стратегию X^2. Стратегия X^2 называется *доминируемой.* Аналогично, когда неравенства (5) не являются строгими, говорят, что стратегия Y^1 доминирует стратегию Y^2; стратегия Y^2 называется *доминируемой.*

Теорема 3. *Если $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$ - бесконечная антагонистическая игра, имеющая решение (X^*, Y^*, υ), а функция $H(X^*, y)$ непрерывна по y, то справедливо равенство $H(X^*, y^0) = \upsilon$ для любой точки y^0, содержащейся в спектре стратегий Y^*.*

Если функция $H(x, Y^*)$ непрерывна по x, то справедливо равенство $H(x^0, Y^*) = \upsilon$ для любой точки x^0, содержащейся в спектре стратегий X^*.

Теорема 4. *Для бесконечной антагонистической игры, имеющей решение, ни одна строго доминируемая стратегия игрока не содержится в спектре его оптимальной стратегии.*

В пятой главе рассматриваем нахождение решений бесконечных антагонистических игр. Приближенные решения бесконечных антагонистических игр можно находить, используя их аппроксимации матричными играми, для решения которых применяются методы линейного программирования. Поступая подобным образом, можно найти ε-оптимальные стратегии для любого $\varepsilon > 0$. Для практических целей этого обычно достаточно.

Теорема 5. *Если x и y - ограниченные и замкнутые многогранные подмножества, образованные пересечением конечного числа полуплоскостей $\mathbb{R}^m$ и*

$\mathbb{R}^n$, *а функция H является билинейной функцией на $x \times y$, т.е. имеет вид*

$$H = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_i y_j,$$

где $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$ имеет решение в чистых стратегиях, причем эти решения определяются решениями некоторой матричой игры.

Теорема 6. *Если x и y - сепарабельные компакты, множество $x \subset \mathbb{R}^m$ выпукло, а функция H непрерывна на $x \times y$ и вогнута по $x \in x$ при каждом значении $y \in y$, то в игре $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$ первый игрок имеет оптимальную чистую стратегию.*

Теорема 7. *Если x и y - сепарабельные компакты, множество $y \subset \mathbb{R}^m$ выпукло, а функция H непрерывна на $x \times y$ и выпукла по $y \in y$ при каждом значении $x \in x$, то в игре $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$ второй игрок имеет оптимальную чистую стратегию.*

Пусть единичный квадрат некоторым образом составле из конечого числа многоугольников,т.е. является их объединением, а множества $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ внутренних точек этих многоугольников попарно не пересекающихся. Тогда всякую непрерывную функцию на единичном квадрате, линейную на каждом множестве Ω_i, будем называть *непрерывной кусочно линейной функцией.*

Положим $\Phi = \bigcup\limits_{i \neq j} (\overline{\Omega}_i \bigcap \overline{\Omega}_j)$.

$$H = \begin{cases} 1+ & \frac{1}{\delta}(x-y) \text{ при } x \leqslant y, \quad |x-y| \leqslant \delta, \\ 1+ & \frac{1}{\delta}(y-x) \text{ при } x \geqslant y, \quad |x-y| \leqslant \delta, \\ & 0 \quad\quad\quad \text{ при } \quad\quad\quad |x-y| > \delta. \end{cases} \tag{6}$$

Оно состоит из точек квадрата, лежащих на прямых $y = x + \delta,\ y = x,\ y = x - \delta$.

Определим многозначные отображения f и g соответственно множеств x и y в множества подмножеств y и x следующим образом:

$$f(x) = \{y \in y \mid (x, y) \in \Phi\}, \quad g(y) = \{x \in x \mid (x, y) \in \Phi\}.$$

Теорема 8. *Пусть* $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$ *- игра на единичном квадрате с непрерывной кусочно линейной функцией* H. *Тогда каждое решение конечной антагонистической игры* $\Gamma^1 = \langle a, b, H \rangle$, *где* a *и* b *- конечные множества для которых справедливы условия* $a \subset x, b \subset y (0, 1 \in a, 0, 1 \in b), f(a) \subset b, g(b) \subset a$, *является решением игры* Γ.

Для игры на единичном квадрате, функция выигрыша которой определена формулой (6), образ нуля при отображении f состоит из двух точек 0 и δ, а образ единицы – из точек 1 и $1-\delta$. Далее, $g(0) = \{0, \delta\}$, $g(\delta) = \{0, \delta, 2\delta\}$, $g(1-\delta) = \{1-2\delta, 1-\delta, 1\}$, $g(1) = \{1-\delta, 1\}$. Рассматривая затем f-образ множества $\{0, \delta, 2\delta, 1-2\delta, 1-\delta, 1\}$, затем g-образ этого f-образа и т.д., придем, наконец, к множествам

$$a = \{0, \delta, \ldots, n\delta, 1-n\delta, 1-(n-1)\delta, \ldots, 1\}, \tag{7}$$

$$b = \{0, \delta, \ldots, n\delta, 1-n\delta, 1-(n-1)\delta, \ldots, 1\}, \tag{8}$$

$n = \left[\frac{1}{\delta}\right]$, для которых $f(a) \subset b,\ g(b) \subset a$. Следовательно, любое решение конечной антагонистической игры $\Gamma = \langle a, b, H \rangle$, где H - определена по формуле (6), является решением игры $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$.

В шестой главе даем постановку задачи, определяем ее алгоритм и решаем на конкретных значениях.

Пусть одна из фирм (игрок II) имеет n рынков сбыта, а другая (игрок I) желает их захватить. На эту цель она может выделить капитал в размере A. Игрок II для защиты своих рынков сбыта также располагает некоторой суммой B. Не ограничивая общности, будем считать, что $B = 1$. Стратегиями игрока I в этой ситуации являются всевозможные распределения суммы A между рынками сбыта. Если для захвата рынка i он выделит сумму x_i, а игрок II для защиты этого рынка выделит сумму y_i, то игрок I на этом рынке выигрывает $k_i(\alpha_i x_i - y_i)$, если $\alpha_i x_i - y_i \geqslant 0$, и ничего не выигрывает в противном случае. Коэффициент k_i определяет степень важности рынка, а коэффициент α_i - степень сопротивления рынка i фирме, проводящей экспансионистскую прлитику.

Суммирование по всем рынкам показывает, что выигрыш первого игрока равен величине

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \max(0, k_i(\alpha_i x_i - y_i)). \tag{9}$$

Таким образом, мы приходим к игре $\Gamma = \langle x, y, H \rangle$,
где $x = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = A, x_i \geqslant 0 \right\}$,
$y = \left\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1, y_i \geqslant 0 \right\}$, а H определяется формулой (9).

Покажем теперь построение и решение игры Γ, моделирующей борьбу за рынки сбыта, приняв следующие гипотетические данные.

Пусть ода фирма (игрок II) имеет три рынка сбыта и располагает для их защиты от другой фирмы (игрок I) суммой денег, равной 300 000 долларов. В свою очередь, игрок I для захвата рынков выделил сумму денег, равную 600 000 долларов. Причем $A = 2$ и $B = 1$, а характеризацию рынков задается таблицей 1

Таблица 1 – Значение коэффициентов α_i и k_i

Рынок i	1	2	3
α_i	1	0,6	0,4
k_i	2	4	1

Перебирая все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$, найдем, что максимум в формуле

$$\nu = \max_S \frac{A \sum\limits_{i \in S} (\alpha_i - 1)}{\sum\limits_{i \in S} \frac{1}{k_i}} = \frac{A \sum\limits_{i \in S_0} (\alpha_i - 1)}{\sum\limits_{i \in S_0} \frac{1}{k_i}} \tag{10}$$

достигается на множестве $S_0 = \{1, 2\}$, $\nu = \dfrac{44}{15}$. Затем, используя равенства

$$y_i^* = -\frac{A \sum\limits_{i \in S_0} (\alpha_i - 1)}{\sum\limits_{i \in S_0} \frac{1}{k_i}} \frac{1}{k_i} + \alpha_i A, \tag{11}$$

получим $y_1^* = \dfrac{8}{15}, y_2^* = \dfrac{7}{15}$. Компоненты оптимальной стратегии игрока I вычисляются по формуле

$$\xi_i^* = \frac{1}{k_i}\left(\sum_{j\in S_0}\frac{1}{k_j}\right)^{-1},$$

т.е. $\xi_1^* = \dfrac{2}{3}, \xi_2^* = \dfrac{1}{3}$.

Таким образом, одна фирма распределяет денежные средства для защиты только первого и второго рынков, выделяя соответственно 160 000 и 140 000 долларов, а другая фирма с вероятностями $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{1}{3}$ выделяет 600 000 долларов соответственно для захвата первого и второго рынков. Математическое ожидание выигрыша второй фирмы будет равно 880 000 долларам.

Описание алгоритма:

Шаг 1 Вводим входные данные.

Шаг 2 Производим подсчет части A от части B.

Шаг 3 Считаем ν по формуле (10), перебираем все подмножества множества S(т.е. сочетания без повторений), чтобы найти S_0.

Шаг 4 Находим y_i^* по формуле (11), т.е.

$$y_i^* = -\frac{\nu}{k_i} + \alpha_i A, \quad i \in S_0$$

Шаг 5 Считаем ξ_i^* по формуле

$$\xi_i^* = \frac{1}{k_i}\left(\sum_{j\in S_0}\frac{1}{k_j}\right)^{-1}.$$

Шаг 6 Считаем распределения денежных средств y_i для защиты по формуле

$$By_i^* = y_i.$$

Шаг 7 Находим математическое ожидание выигрыша

$$\max(0, k_i(\alpha_i x_i - y_i)), \quad \text{где } x_i = A.$$

Подсчеты такой модели описаны с помощью программного продукта на Java.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория бесконечных антагонистических игр - математический метод изучения оптимальной стратегии в играх. Но именно теория бесконечных игр позволяет нам рассматривать и с легкостью решать задачи принятия решений в ситуациях с несколькими участниками, когда значение целевой функции для каждого зависит также от решений принимаемых остальными участниками. Поэтому важную роль в бесконечных играх отводится конфликтам и совместным действиям.

Бесконечные нтагонистические игры широко нашли свое применение для анализа проблем микроэкономики, а также и в других сферах, а именно менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство, торговля и транспорт, связь и т.д...

В процессе написания моей бакалаврской работы были реализованы следующие задачи:

1. Изучен теоретический материал в рамках исследуемой темы работы;
2. Отобрана задача для практической реализации, а именно "захват рынков сбыта";
3. Составлена к ней алгоритмы решения задачи;
4. Разработан программный продукт на языке Java, который реализует решение этой задачи.

Следовательно, поставленную цель можно считать достигнутой, а задачи выполненными.