МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Решение задачи распределения ресурса с помощью теории управляемых марковских процессов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико математического факультета

Кузнецова Дениса Александровича

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент ______________ И. А. Кузнецова

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. ,н. доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 11 июня 2021 г.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Управляемые марковские процессы возникают в самых разнообразных областях. Обратимся, например, к экономическому планированию. Планировать можно работу отдельного предприятия, отрасли или всего народного хозяйства. В начале каждого периода, исходя из достигнутого состояния, намечается план на следующий период. Развитие системы можно описывать математически как управляемый детерминированный процесс, если считать, что состояние системы в конце каждого периода однозначно определяется состоянием в начале периода и планом на этот период. Однако не всегда можно пренебрегать влиянием таких факторов, как метеорологические условия, демографические сдвиги, колебания спроса, несовершенство координации сложных производственных процессов, научные открытия и изобретения. Эти факторы лучше учитываются стохастическими моделями, в которых, зная состояние в начале периода и план, можно вычислить лишь распределение вероятностей для состояния в конце периода. Таким образом приходим к управляемому марковскому процессу.

Управляемые марковские процессы рассматриваются в задачах таких как: распределение ресурса между производством и потреблением и между различными отраслями производства, замена оборудования, стабилизация линейной систем, находящейся под влиянием случайных возмущений, распределение ставок в игре и т.д.

Актуальность определила выбор темы данной работы: «Управляемые марковские процессы и их применение к задаче о распределении ставок в игре».

Целью работы является изучение теории управляемых марковских процессов и решение задач о распределении ставок в игре для конечного случая.

Объект и предмет исследования - управляемые марковские процессы и задача о распределении ставок в игре.

Практическая значимость. Вместо двух игр можно рассматривать два способа помещения денег (например, в сбербанк или коммерческий банк), или две производственные отрасли с различными коэффициентами отдачи.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех теоретических и одной практической главы, заключения, списка использованных источников и приложения.

Введение содержит основные положения: статически подкрепленную актуальность темы исследования; цель, объект, предмет, и практическую значимость исследования.

В первой главе «Конечные управляемые марковские модели на промежутке времени [m,n]» приведены основные компоненты управляемых марковских моделей, рассмотрены стратегии и оценки, фундаментальное уравнение, уравнения оптимальности. Теоретической основой были источники литературы [1]-[2].

Для задания марковской модели на промежутке времени [m,n] необходимо задать следующие компоненты:

1. Множества $X_m, ..., X_t, ..., X_n$. $X_t(t = m, ..., n)-$ множество состояний в момент времени t, X_m множество начальных состояний; X_n- множество конечных или финальных состояний, $X = \bigcup\limits_{t=m}^{n} X_t-$ множество всех состояний, $X' = \bigcup\limits_{t=m}^{n-1} X_t-$ множество всех нефинальных состояний.
2. Множества $A_m, ..., A_t, ..., A_n$. $A_t(t = m, ..., n)-$ множество управлений в момент времени $t, A = \bigcup\limits_{t=m}^{n-1} A_t-$ множество всех управлений.
3. Отображение $\alpha : X' \longrightarrow 2^A(2^A-$ множество всех подмножеств A), обладающее свойством $\forall x \in X_t \alpha(x) \subset A_t$.
4. Отображение P, ставящее в соответствие каждому управлению $a \in A_t$ распределение вероятностей P_a на X_{t+1}. $P-$ переходная функция. Распределения P_a мы будем также обозначать $P(\cdot/a)$, а значение $P_a(y)$ – $P_a(y/a)$.

   $P_a(y)-$ это вероятность, применив управление $a \in A_t$ в состоянии $x = j(a)$, попасть на следующем шаге в состояние $y \in X_{t+1}$.
5. Функция $q : A \longrightarrow R$ - текущая плата.
6. Функция $r : X_n \longrightarrow R$ - финальная плата.

Путем называется следующая последовательность состояний и управлений

$$l = x_m a_m ... x_t a_t ... x_{n1} a_{n1} x_n.$$

$L-$ множество всех путей.

Оценкой пути l называется число

$$I(l) = \sum_{t=m}^{n-1} q(a_t) + r(x_n).$$

Вероятностью пути называется число

$$P(l) = \mu(x_m) \prod_{t=m}^{n-1} P(x_{t+1}|a_t).$$

В главе также рассмотрена простая стратегия. С помощью нее в каждом нефинальном состоянии выбирается конкретное допустимое управление. Существует более сложный способ управления, чем простые стратегии, а именно способ, когда в каждом состоянии выбирается не конкретное управление, а распределение вероятностей на множестве допустимых управлений, и оно зависит не только от состояния, в котором находится процесс, но и от всего его развития. Таким способом является стратегия . Далее в главе даны определения оптимальности стратегий и приведены теоремы, в которых доказывается, что в конечной управляемой марковской модели существует равномерно оптимальная стратегия.

Стратегия π_0 называется оптимальной для начального распределения μ, если справедливо равенство

$$\omega(\mu, \pi_0) = \underset{\pi}{max} \omega(\mu, \pi).$$

Стратегия π_0 называется оптимальной для начального состояния $x \in X_m$, если справедливо равенство

$$\omega(\mu, \pi_0) = \underset{\pi}{max} \omega(x, \pi).$$

После приведены понятия фундаментального уравнения и уравнений оптимальности.

Оценка стратегии при начальном состоянии x в исходной модели связана с оценкой ω' в производной модели равенством:

$$\omega(x, \pi) = \sum_{a \in \alpha(x)} \pi(a/x)[q(a) + \omega'(P_a, \pi'_a)],$$

называемым фундаментальным уравнением.

Если – оценка состояний в исходной модели Z, $'$ - оценка состояний в производной модели Z' , то и $'$ связаны соотношением

$$\forall x \in X_m v(x) = \max_{a \in \alpha(x)} u(a),$$

где $u(a) = q(a) + v'(P_a) = q(a) + \sum_{y \in X_{m+1}} P(y/a)v'(y)$.
Соотношение называется уравнением оптимальности.

Во второй главе «Задача о распределении ставок в игре» описана постановка задачи о распределении ставок в игре и приведены результаты решения этой задачи для конечного случая.

Задача состоит в следующем:

Пусть имеющийся капитал x можно распределить между двумя вариантами игры. При ставке z выигрыш в первой игре равен σz, а во второй τz, где σ и τ - случайные величины с различными распределениями вероятностей. Игра повторяется многократно. Пусть x_t - общая сумма, которой играющий располагает в момент времени t. Тогда, если a_t - капитал, вкладываемый на шаге t в первую игру, $x_t a_t$ - капитал, вкладываемый во вторую игру, то капитал на шаге $t + 1$ вычисляется по формуле:

$$x_{t+1} = \sigma_t a_t + \tau_t(x_t - a_t).$$

Вместо двух игр можно рассматривать два способа помещения денег (например, в сбербанк или коммерческий банк), или две производственные отрасли с различными коэффициентами отдачи.

Целью является получение максимально возможного окончательного выигрыша, который можно оценить с помощью неубывающей функции $r(x)$. Оптимальное поведение зависит от вида функции r. Может случиться, что требуется определенная сумма c и целью является выиграть эту сумму с максимальной вероятностью. В этом случае надо положить:

$$r(x) = \begin{cases} 1, \text{x} \geq c, \\ 0, x < c. \end{cases}$$

Так же рассмотрены основные определения и свойства полунепрерывной модели, и также описано нахождение оптимальной стратегии в задаче о распределении ставок в игре. Теоретической основой были источники литературы [3]-[10].

Пусть E - произвольное метрическое пространство. Напомним, что множество E называется метрическим пространством, если любым $x, y \in E$ сопоставлено неотрицательное число $\rho(x, y)$ (расстояние между x и y), такое что:

1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

2) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \forall x, y, z \in E$.

Функция, заданная на E называется полунепрерывной, если все множества $\{x : f(x) \geq c\}$, где c - действительное число, замкнуты. Обычно такие функции называют полунепрерывными сверху.

Пусть даны два метрических пространства $(E, B(E))$ и $(E', B(E'))$. Соответствие из E в E' сопоставляет каждой точке x пространства E непустое множество $\Phi(x)$ в другом пространстве E' . Говорят, что соответствие $\Phi(x)$ квазинепрерывно по x, если при $x_k \longrightarrow x \in X (x_k \in X)$ и $a_k \in \Phi(x_k)$ последовательность a_k имеет предельную точку, принадлежащую $\Phi(x)$.

Функция $\delta : E \longrightarrow E'$ называется селектором соответствия Φ, если $\delta(x)$ принадлежит множеству $\Phi(x)$ при всех x из E.

Соответствие допускает измеримый выбор, если для него существует измеримый селектор.

Модель Z назовем полунепрерывной, если:

1. Множество состояний X - сепарабельное метрическое пространство, при этом $X_m, X_{m+1}, ..., X_n-$ замкнутые подмножества X.
2. Множество управлений $A-$ сепарабельное метрическое пространство и $A_m, ..., A_{n1}$ - замкнутые подмножества A.
3. Соответствие $\alpha(x)$ квазинепрерывно по x.
4. Если $f \in L(X_t)$ и $g(a) = \int\limits_{X_t} p(dx|a) f(x)$, где $a \in A_t$. Тогда $g \in L(A_t) (t = m + 1, ..., n)$.
5. Плата q на множестве A_t принадлежит $L(A_t)$.
6. Плата r принадлежит $L(X_n)$.

Далее в главе приведено понятие дерзкой стратегии и с помощью индукции по n доказано, что дерзкая стратегия оптимальна.

Суть дерзкой стратегии заключается в том, что нужно делать возможно большие ставки, совместимые с наличными средствами, т.е избегая бесцельного риска. Это значит, что при $x \leq 1/2$ следует ставить на игру весь имеющийся капитал x, при $1/2 \leq x \leq 1-$ ставить недостающую сумму $1x$, при $1 \leq x$ - вообще ничего не ставить. Дерзкая стратегия задается на всех шагах одним и тем же селектором

$$\psi_0(x) = \begin{cases} x,\ 0 \leq x \leq 1/2, \\ \text{1 - x, } 1/2 \leq x \leq 1, \\ \text{0, x} > 1. \end{cases}$$

В третьей главе «Разработка алгоритма решения задачи о распределении ставок в игре для конечного случая» приведен алгоритм решения задачи о распределении ставок в игре для конечного случая, написанный на языке программирования Java.

Задача о распределении ставок в игре описывается реккурентным уравнением

$$x_t = [a_t\sigma_t + (1 - a_t)\tau_t]x_{t-1}.$$

Можно представить себе игру, где с определенной вероятностью выйгрыш равен поставленной сумме денег и с обратной вероятностью ставка теряется. Игрок, распологающий наличностью, выбирает на каждом шаге размер ставки. Его цель - с максимальной вероятностью в конце игры получить сумму, не меньше максимальной доступной ставки.

Оптимальное поведение игрока существенно зависит от соотношений вероятностей проигрыша и победы. При фиксированном числе шагов задача определения оценки и стратегии была рассмотрена и запрограммирована в ранних разделах. Данную задачу можно рассмотреть при допущении сколь угодно длинного промежутка игры.

Так же была рассмотрена задача о распределении ресурса между потреблением и различными отраслями производства.

В задаче о распределении ресурса между двумя отраслями и потреблением

имеется ресурс x, который нужно распределить между производством и потреблением на шаге . Если a_t- часть ресурса, вкладываемая в производство, $s_t \in S_t-$ случайный фактор, то ресурс в следующий момент времени вычисляется по формуле

$$x_{t+1} = F_t(a_t, S_t).$$

Задача управления состоит в максимизации дохода за n шагов.

Управляемая марковская модель, соответствующая данной задаче, выглядит следующим образом

$$\forall X_l = X = [0, C],$$

где $C-$ достаточно большое число,

$$A_t = A = X,$$

$$\forall x \in X, \alpha(x) = [0, x],$$

переходная функция задается равенством

$$x_{t+1} = F_t(a_t, S_t),$$

доход за t шагов $\sum\limits_{t=1}^{n} q(x_t - a_t)$,

$$r \equiv 0.$$

Уравнение оптимальности принимает вид

$$v_t(x) = \max_{0 \le a \le x} [q(x - a) + M v_{t+1}(F_t(a, S))].$$

Предположим, что $\forall t = m, ..., n-1, q(c) = c^{\alpha}, \alpha \in (0,1), s-$ положительная случайная величина с одним и тем же распределением вероятностей и $F(a, s) = as$ то есть выпуск пропорционален затратам.

Уравнения оптимальности принимают вид

$$v_t(x) = \underset{0 \le a \le x}{max}[(x-a)^\alpha + Mv_{t+1}(as)], t = 0, ..., n-1;$$

$$v_n \equiv r \equiv 0.$$

Предположим, что $v_{t+1}(x) = b_{t+1}x^\alpha$, и вычислим $v_t(x)$.

$$Mv_{t+1}(as) = Mb_{t+1}(as)^\alpha = b_{t+1}a^\alpha Ms^\alpha = \lambda b_{t+1}a^\alpha,$$

где $\lambda = Ms^\alpha$,
Ищем $\underset{0 \le a \le x}{max}[(x-a)^\alpha + \lambda b_{t+1}a^\alpha]$.
Приравнивая производную нулю получаем

$$a = \frac{x}{(\lambda b)^{\frac{1}{\alpha-1}} + 1};$$

$$\frac{1}{(x-a)^{1-\alpha}} = \frac{\lambda b_{t+1}}{a^{1-\alpha}};$$

$$a = \frac{(\lambda b_{t+1})^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1 + (\lambda b_{t+1})^{\frac{1}{1-\alpha}}} \cdot x.$$

Подставляя найденное значение a в выражение для $v_t(x)$, получаем

$$v_t(x) = \frac{1 + (\lambda b_{t+1})^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(1 + (\lambda b_{t+1})^{\frac{1}{1-\alpha}})^\alpha} x^\alpha = (1 + (\lambda b_{t+1})^{\frac{1}{1-\alpha}})^{1-\alpha} \cdot x^\alpha.$$

Таким образом, если $v_{t+1}(x) = b_{t+1}x^\alpha$, то $v_t(x) = b_t x^\alpha$,
где $b_t = (1 + (\lambda b_{t+1})^{\frac{1}{1-\alpha}})^{1-\alpha}$,
при этом оптимальное уравнение на шаге t

$$d_t = \frac{(\lambda b_{t+1})^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1 + (\lambda b_{t+1})^{\frac{1}{1-\alpha}}} \cdot x.$$

Поскольку $v_n \equiv r \equiv 0$, то $d_{n-1} = 0, b_{n-1} = 1$ и далее используем найденные рекурентные формулы.

Введем $b'_k = b_{n-k}; d'_k = d_{n-k}$. Тогда вырны равенства

$$b'_0 = 0, b'_{k+1} = [1 + (\lambda b'_k)^{\frac{1}{1-\alpha}}]^{1-\alpha},$$

$$d'_{k+1} = \frac{(\lambda b'_k)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1 + (\lambda b'_k)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Далее введем c_k.

$$c_k = b_k^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

связаны соотношением

$$c_{k+1} = 1 + \mu c_k,$$

где

$$\mu = [M s_t^\alpha]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Таким образом

$$c_0 = 0,$$

$$c_k = 1 + \mu + ... + \mu^{k-1}, k = 1, 2, ...$$

Тогда коэффициенты b_k и d_k выражаются через c_k по формулам

$$b_k = c_k^{1-\alpha},$$

$$d_k = \frac{\mu c_k}{1 + \mu c_k}.$$

Приведенные формулы дают полное решение задачи.

В заключении преведены результаты бакалаврской работы.

В приложении представлены получившийся программный код и результаты его выполнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была решена задача о распределении ставок в игре с помощью теории управляемых марковских процессов. Были рассмотрены теоретические сведения теории управляемых марковских процессов, был приведен алгоритм решения задачи для конечного случая, результаты выполнения которого доказывают, что нужно делать возможно большие ставки, совместимые с наличными средствами, т.е избегая бесцельного риска. При капитале $x \leq 1/2$ следует ставить на игру весь имеющийся капитал x, при $1/2 \leq x \leq 1$ - ставить недостающую сумму $1x$, при $1 \leq x$ - вообще ничего не ставить.

Была рассмотрена задача распределения ресурсов производства и потребления в дискретном и полунепрерывном случае, описан алгоритм и написана программа подтверждающая теоретические описания моделей и демонстрирующие ожидаемые результаты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Кузнецова, И. А. Управляемые марковские процессы и их приложения. / И. А. Кузнецова. -Саратов СГУ, 1999. - 19 с.

2 Дынкин, Е.Б., Юшкевич, А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения. / Е. Б. Дынкин. - М.: Наука, 1975. - 341 стр.

3 Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. / М. Я. Кельберт. - М.: МЦНМО, 2009. - 295 с.

4 Марков А. А., Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга. /А. А. Марков. - Известия физико-математического общества при Казанском университете. 2-я серия. Том 15. 1906. - 135-156с.

5 Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова. Перев. с англ. / - М.: Мир, 1964. - 425 с.

6 Нуммелин Э., Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. / Э. Нуммелин. - М.: Мир, 1989. - 207 с.

7 Яглом А. М., Яглом И. М., Вероятность и информация. / А. М. Яглом. - М., Наука, 1973. - 512 с.

8 Рудой Ю. Г., Обобщенная информационная энтропия и неканоническое распределение в равновесной статистической механике, - ТМФ, 135:1 2003. 3-54с.

9 Романовский И.В. Дискретный анализ: Учебное пособие для студентов, 3-е изд. / И. В. Романовский. СПб: Невский Диалект; БХВ - Петербург, 2003. - 413с.

10 Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций, 6-е изд. / А. Хэмли. - М.: Издательский дом Вильямс, 2001. - 295с.

11 Гербер Х. Математика страхования жизни. / Х. Гербер. - М.: АНКИЛ, 1995. - 156с.

12 Касимов Ю. Ф. Начала актуарной математики (для страхования жизни и пенсионных схем). / Ю. Ф. Касимов. - Зеленоград. - 199 с.

13 Четыркин Е. М. Актуарные методы в негосударственном медицинском страховании. / Е. М. Четыркин. - М.: Дело, 1999. - 48 с.

14 Шарп У.Ф., Александер ГДж,. Бейли Дж. В. Инвестиции. Пер. с англ. / У. Ф. Шарп. - М.: Инфра-М, 1997. - 122 с.

15 Браун СДж., Криишен М.П. и др. Количественные методы финансового анализа. Пер. с англ. / М. П. Криишен. - М.: Инфра-М, 1996. - 85 с.

16 Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. Пер. с англ. - М.: Статистика, 1980. - 412с.

17 Бирман Г. Шмидт С. Экономический анализ инвестиционных проектов. / Г. Бирман. - М.: ЮНИТИ, 1997. - 291 с.

18 Четыркин Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. / Е. М. Четыркин. - М.: Дело, 1998. - 123 с.

19 Шарп У.Ф,. Александер ГДж,. Бейли Дж. В. Инвестиции. / У. Ф. Шарп. - М. ИнфраМ, 1997. - 153 с.

20 Вернер М. Основы кодирования. Учебник для ВУЗов. / М. Вернер - М.: Техносфера, 2004. - 176 с.