МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической физики и вычислительной математики

Применение систем функций сжатия и сдвигов для обработки сигналов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы
направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Осипова Никиты Сергеевича

Научный руководитель
к. ф.-м.н., доцент Д.С.Лукомский

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В.А. Юрко

Саратов 2021

Введение. В этой бакалаврской работе рассматриваются системы Уолша и Фабера-Шаудера, а так же их применение в обработке сигналов. Данная тема очень актуальна в наше время, так как обработка сигналов применяется в таких различных областях, как биомедицина, акустика, звуковая локация, радиолокация, сейсмология, связь, системы передачи данных, ядерная техника, и многих других. Например, при анализе электроэнцефалограмм, электрокардиограмм, а также передаче и распознавании речи требуется выделять некоторые характерные параметры сигнала. Иногда же возникает необходимость отделения помехи типа шума от сигнала или приведения сигнала к виду, который наиболее удобен для пользователя. В качестве другого примера обработки сигналов можно привести случай, когда сигнал, передаваемый по каналу связи, подвергается различным искажениям и приемник компенсирует их.

Система Фабера-Шаудера возникла как первый пример базиса в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ и была определена в 1910 году Фабером. Шаудер переоткрыл ее в 1927 году и до 70-х годов она называлась системой Шаудера. Работу Фабера вспомнили в 70-х годах и систему стали называть системой Фабера-Шаудера. Эта система является простейшим базисом пространства $[0, 1]$. Фабером доказано, что система образует базис в пространстве $[0, 1]$.

Ортонормированная система функций Уолша была введена в 1923 г. Дж. Уолшем, как упрощенный аналог тригонометрической системы функций.На развитие теории рядов Уолша сильное влияние оказала и продолжает оказывать классическая теория тригонометрических рядов. Эта система наиболее удобна для представления и анализа цифровых сигналов.

Целю данной работы является изучение вопросов сходимости разложения рядов Фурье по системам Уолша и Фабера-Шаудера , а так же применения этих систем к обработке сигналов. Для этого была создана программа, которая вычисляет коэффициенты разложения, затем производит анализ данных коэффициентов и восстанавливает данные по ним. Для построения грамотного алгоритма программы, была изучена основная теория, касающаяся данных систем.

Работа состоит из введения, трёх разделов, заключения, списка используемых источников и приложения.

1. В первом разделе проводится исследование системы Уолша. А именно, рассматриваются основные определения и свойства, ряды Фурье по системе Уолша, а так же быстрый алгоритм преобразования Фурье-Уолша, необходимый для создания корректно работающей программы.
2. Во втором разделе исследуется система Фабера-Шаудера. Даются основыне определения и базовые теоремы.Так же изучаются системы типа Фабера-Шаудера и доказывается теорема о их коэффициентах разложения .
3. В третьем разделе рассматривается задача построения алгоритма разложения Фабера-Шаудера и Уолша, проводится анализ численной погрешности и приводятся графики построения этих двух систем.

Основное содержание работы. Основная часть работы состоит из 3 глав. В **первой** главе мы даем основные определения,необходимые для лучшего понимания теории функций Уолша. Так же в ней рассматриваются основные свойства операции сложения чисел, заданных в двоичной системе счисления и теория рядов Фурье по системе Уолша.В конце первой части работы рассматривается, необходимый для написания практического задания, алгоритм быстрого преобразования Фурье-Уолша.

Определение 1.Система Радемахера - ортонормированная на отрезке $[0, 1]$ система функций

$$\{r_k(x)\} = sign\left[\sin\left(2^k x\pi\right)\right], x \in [0, 1], k = 1, 2, \ldots$$

где

$$signx = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Определение 2. Система Уолша - это система функций

$$W = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, x \in [0, 1],$$

в которой $w_0(x) \equiv 1$, а при $n \geq 1$

$$w_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)} = r_{k(n)+1}(x) \prod_{k=0}^{k(n)-1} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)}$$

где $r_k(x), k = 1, 2, \ldots,$ - функции Радемахера.

Система Уолша - полная в $L^2(0,1), 1 \leq p < \infty$, ортонормированная система функций. Из этого следует, что функции $w_n(x), 0 \leq n \leq 2^k$, постоянны на каждом из интервалов $\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$. Исходя из этого, делаем вывод, что после изменения в конечном числе точек функции $w_n(x)$ становятся элементами пространства D_{2^k} и в виду их попарной ортогональности образуют базис в D_{2^k}, а так же заметим, что для $k \geq 0, i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$

$$w_{2^k+i}(x) = r_{k+1}(x) w_i(x) = w_{2^k}(x) w_i(x),\ x \in [0,1]$$

Определим операцию $\dot{+}$ сложения чисел, заданных в двоичной системе счисления: если $x, y \in [0, \infty)$,

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k(x) 2^{-k},\ y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_k(y) 2^{-k},$$

то положим

$$x \dot{+} y := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\theta_k(x) - \theta_k(y)| 2^{-k} \tag{1}$$

Свойства:

1. если $x \geq 0, y \geq 0$- целые чиста, то $x \dot{+} y$- также неотрицательное целое число;
2. если $x, y \in [0,1)$, то $x \dot{+} y \in [0,1)$
3. $(x \dot{+} y) \dot{+} z = x \dot{+} (y \dot{+} z)$, $x \dot{+} y = y \dot{+} x$, $x \dot{+} x = 0$;
4. $|(x \dot{+} y) - x| \leq y$

5. для любой функции $f \in L^1(0,1)$, функция

$$f_y(x) := f(x \dot{+} y),\ x \in (0,1)$$

при фиксированном $y \in [0,1)$ равноизмерима на $(0,1)$ с $f(x)$ и, следовательно,

$$\int_0^1 f_y(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

6. для любого целого $N \geq 1$

$$N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_s},\ k_1 > k_2 > \ldots > k_s \geq 0,$$

справедливо равенство

$$\{N\dot{+}j\}_{j=0}^{N-1} = \bigcup_{l=1}^{s} Q_{k_l},$$

где $Q_k := n : 2^k \geq n < 2^{k+1}, k = 0, 1, \ldots.$

Каждой функции $f \in L^1(0,1)$ соответствует её ряд Фурье по системе Уолша:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) w_n(x),\ c_n(f) = \int_0^1 f(x) w_n(x) dx.$$

Для рассмотрения свойств коэффициентов и частных сумм ряда нам необходимы следующие утверждения:

1. Если $f \in L^1(0,1)$ и $y \in (0,1)\backslash R_2$, то

$$c_n(f_y) = \omega_n(y) c_n(f),\ n = 0, 1, \ldots$$

2. Для коэффициентов Фурье-Уолша функции $f \in C(0,1)$ имеет место оценка

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{n}, f\right),\ n = 1, 2, \ldots$$

Докажем абсолютную сходимость ряда коэффициентов Фурие-Уолша функции $f(x)$.

Теорема 1. Пусть $f \in C(0,1)$ и $\omega(\delta, f) = O(\delta^{\alpha})$ $(\delta \to 0)$ при некотором

$\alpha > \frac{1}{2}$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)| < \infty$$

Теорема 2. Для $f \in C(0,1)$ и $x \in (0,1) \backslash R_2$ имеет место неравентво

$$|S_N(f,x) - f(x)| \leq Cw\left(\frac{1}{N}, f\right) \ln N, N = 2, 3, \ldots,$$

где $S_N(f,x) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} c_n(f) w_n(x)$ - частная сумма ряда (5) , а C - абсолютная постоянная.

Следствие 1. Если $f \in C(0,1)$ и $w(\delta, f) = o\left(\ln^{-1} \frac{1}{\delta}\right)$ при $\delta \to 0$, что ряд Фурье-Уолша функции $f(x)$ сходиться к ней равномерно на множестве $(0,1) \backslash R_2$.

Алгоритм быстрого преобразования Фурье-Уолша. Пусть $n \in N$ фиксировано, $f^{(n)}(x)$- двоично-постоянна на [0,1) и $f_k = f^{(n)}(\Delta_k^{(n)})$, где $\Delta_k^{(n)}$- интервал (участок постоянства), а $\omega_k(x)$- функции Уолша на [0,1). Тогда

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2^n - 1} c_k \omega_k(x) \tag{2}$$

Задача состоит в нахождении коэффициентов c_k. Перепишем (2) в виде

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2^n - 1} c_k \omega_k(x) + \tau_{n-1}(x) \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} c_k (2^{n-1} + k) \omega_k(x) =$$
$$= f^{(n-1)} + \tau_{n-1}(x) g^{(n-1)}(x),$$

где $f^{(n-1)}$ и $g^{(n-1)}$- двоично-ступенчатые на интервалах ранга $n-1$. Записав полученное равенство в точках полуинтервала $\Delta_k^{(n-1)} = \Delta_{2k}^{(n)} \cup \Delta_{2k+1}^{(n)}$ получим новые равенства:

$$\begin{cases} f_{2k}^{(n)} = f_k^{(n-1)} + g_k^{(n-1)} \\ f_{2k+1}^{(n)} = f_k^{(n-1)} - g_k^{(n-1)} \end{cases}$$

из которых следует

$$\begin{cases} f_k^{(n-1)} = \frac{1}{2}\left(f_{2k}^{(n)} + f_{2k+1}^{(n)}\right) \\ g_k^{(n-1)} = \frac{1}{2}\left(f_{2k}^{(n)} - f_{2k+1}^{(n)}\right) \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим значение функции $f^{(n)}(x)$ через λ_k, где $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, то дискретное преобразование для вектора

$$(\lambda_k) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{n-1}} - 1, \lambda_{2^{n-1}}, \ldots, \lambda_{2^n-1})$$

задается формулами

$$\lambda_k := \frac{1}{2}(\lambda_{2k} + \lambda_{2k+1}),$$
$$\lambda_{2^{n-1}+k} := \frac{1}{2}(\lambda_{2k} - \lambda_{2^n+1})$$

После применения данных преобразований получаем вектор

$$(\lambda_N) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{n-1}} - 1, \lambda_{2^{n-1}}, \ldots, \lambda_{2^n-1})$$

в котором первые $2^{(n-1)}$ компоненты- значение функции $f^{(n-1)}$, а последние 2^{n-1} компонент- значение функции $g^{(n-1)}$. Полученные значения $\lambda_{2^{n-1}}, \ldots, \lambda_{2^n-1}$ не будут коэффициентами Фурье-Уолша функции $g^{(n-1)}$, и поэтому нужно применять преобразование (3) и к левой половине вектора (λ_N) и к правой половине. Повторив эту процедуру n раз, получаем последовательность коэффициентов Фурье-Уолша. Непосредственный подсчет дает число операций

$$2^{n+1} + 2^{n+1} + \ldots + 2^{n+1} = n2^{n+1}$$

Во **втором** разделе изучается система Фабера-Шаудера. Даются основные определения и теоремы касательно системы и ряда Фурье по ней.

Определение 1.Системой Фабера-Шаудера называется система функций

$$\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty},\ x \in [0, 1]$$

в которой

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \ x \in [0,1]$$

и при $n = 2^k + i, k = 0, 1, \ldots, i = 1, 2, \ldots, 2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) := \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right) \\ 1, \text{ если } x = \frac{2^i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{ линейна и непрерывна} \\ \text{ на } \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \text{ и на } \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right]. \end{cases} \tag{4}$$

Определение 2. Ряд по системе Фабера-Шаудера:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k} A_{k,i}\varphi_k^{(i)}(x), \tag{5}$$

где коэффициенты $\{A_n\}$ однозначно определяются функцией $f(x)$, а именно, что

$$A_0 = A_0(x) = f(0), A_1 = A_1(x) = f(1) - f(0)$$

Теорема 1. Система Фабера-Шаудера- базис в пространстве $C(0,1)$, при этом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x), \ f \in C(0,1)$$

частные суммы $S_N(f,x)$ этого разложения принадлежат L_N и удовлетворяют соотношению

$$S_N(f,x) = f(x) \text{ при } x \in \pi_N, N = 1, 2, \ldots$$

Системы типа Фабера-Шаудера. Системой типа Фабера-Шаудера называется система

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = \widetilde{\varphi}_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin \left(a_k^{i-1}, a_k^i\right) \\ 1, \text{ если } x = a_{k+1}^{2i-1}, \\ \text{линейна и непрерывна} \\ \text{на отрезках } \left[a_k^{i-1}, a_{k+1}^{2i-1}\right] \text{ и } \left[a_{k+1}^{2i-1}, a_k^i\right]. \end{cases}$$

Теорема 2. Система типа Фабера-Шаудера $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$, построенная по последовательности точек $\{\{a_k^i\}_{i=0}^{2^k}\}_{k=0}^{\infty}$ с условиями $\lambda_k := \underset{1\le i\le 2^k}{max}\left(a_k^i - a_k^{i-1}\right) \to 0$ при $k \to \infty$, является базисом в $C(0,1)$.

Следствие 1.Для коэффициентов и частных сумм разложения непрерывной функции $f(x)$ по системе типа Фабера-Шаудера имеют место оценки $\left(N = 2^k + i,\ k = 0,1,\dots,\ i = 1,2,\dots,2^k\right)$

1. $|\widetilde{A}_N(f)| \le \omega(\lambda_k, f)$;
2. $\|f - \widetilde{S}_N(f)\|_C \le \omega(\lambda_k, f)$,

где $\omega(\delta, f)$- модуль непрерывности функции $f(x)$.

В **третьем** разделе описывается алгоритм решения практической задачи. Практическая часть работы заключается в построении алгоритма нахождения коэффициентов разложения функций по системам Уолша и Фабера-Шаудера и и в последующем анализе найденных коэффициентов для применения данного алгоритма к обработке сигналов.

В начале разобьем отрезок $[0,1]$ на количество точек 2^n , где n- фиксированное целое число. В первом и во втором разделе, мы ввели понятие частной суммы ряда Фурье по системам Уолша и Фабера-Шаудера. Для нахождения коэффициентов разложения функций для системы Уолша, будем использовать быстрый алгоритм преобразования, описанный в первом разделе работы, так как это ускорит работу алгоритма. Для нахождения коэффициентов для системы Фабера-Шаудера, мы используем формулы:

$$A_n = A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right],$$

где $\{A_n\}$- коэффициенты ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x)$. После нахождения коэффициентов, сортируемых их в порядке возростания и зануляем наименьшие из них по модулю, чтобы определить, как количество коэффициентов влияет на погрешность разложения. По оставшимся коэффициентам восстанавливаем функцию $f(x)$, и сравниваем её с исходной, построив графики этих функций.

Сравним графики и погрешности для функций по Фаберу- Шаудеру при N=8 и N=16:

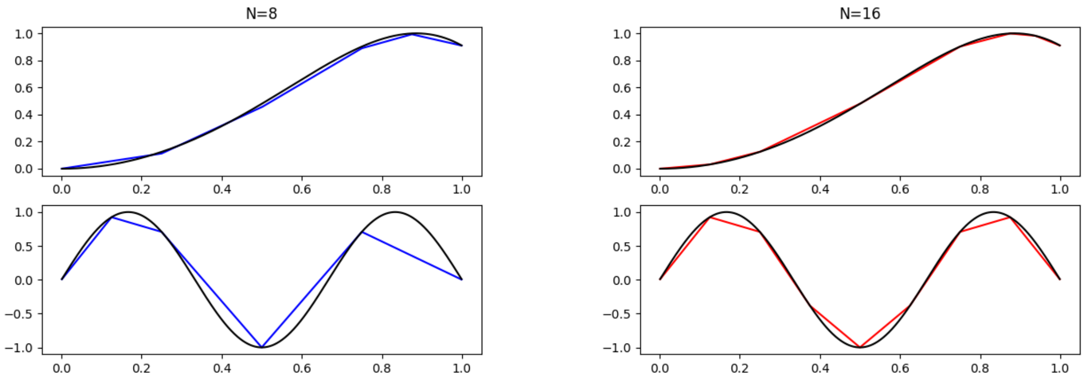

Рисунок 1 — График при занулении 60% коэффициентов

На рисунке 1 синим цветом показан график функции, с 60% зануленных коэффициентов, для N=8, а красным цветом- для N=16. Погрешности в этих случаях:

1. Погрешность 1 функции, для 8 =0.0009866714
2. Погрешность 2 функции, для 8 =0.0065962113
3. Погрешность 1 функции, для 16=0.0004842282
4. Погрешность 2 функции, для 16=0.0020336022

Сравнивая значения полученных погрешностей, можно сделать вывод о том, что погрешность увеличивается за счет зануления коэффициентов преобразования, и уменьшается при увеличении числа N.

Заключение. При выполнении данной бакалаврской работы были рассмотрены и изучены системы Уолша и Фабера-Шаудера. В первом разделе работы были даны основные определения, рассмотрены свойства и ряды Фурье по системе Уолша. Так же, был сформулирован алгоритм быстрого преобразования Фурье-Уолша. Второй раздел работы посвящен исследованию системы Фабера-Шаудера. Были даны определения системы и ряда по ней, заданны основные формулы разложения коэффициентов, а так же рассмотрены системы типа Фабера-Шаудера, с доказательством того, что при наложении определённых ограничений, эти системы являются базисом пространства $C(0,1)$.Заключительная глава работы заключалась в реализации алгоритма нахождения коэффициентов разложения функции по системе Фабера-Шаудера и Уолша, и дальнейшему анализу данных полученных коэффициентов с целью применения данного алгоритма в обработке сигналов.