МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической физики и вычислительной математики

Интегральное представление регуляризирующих операторов А.Н. Тихонова

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы
направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Кудыка Данилы Александровича

Научный руководитель
Старший преподаватель С.Ю. Советникова

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В.А. Юрко

Саратов 2021

Введение. Актуальность темы. В данной работе рассматривается одна из некорректно поставленных задач, в которой решение не является устойчивым. К такой задаче сводится ряд важных задач математической физики, вычислительной математики, теории интегральных уравнений, а также многие прикладные задачи. В течение долгого времени считалось, что эти задачи не имеют практического значения, и их теория не может привести к содержательным математическим результатам. Такое мнение было распространено даже после работы А.Н. Тихонова 1943 г., в которой впервые была указана практическая важность подобных задач и возможность устойчивого их решения. В конце пятидесятых и особенно в начале шестидесятых годов появился ряд новых подходов, которые стали основополагающими для теории некорректных задач и привлекли к ней внимание многих математиков.

Под некорректными (неустойчивыми) задачами обычно понимаются задачи, в которых малые возмущения исходных данных могут вызывать большие изменения результатов.

Цель работы — для рассматриваемого уравнения получить выражение регуляризирующего оператора в интегральном виде.

Объект исследования — метод регуляризации А.Н. Тихонова.

Предмет исследования — методы приближенного решения.

Для достижения цели поставленной в работе, необходимо решить следующие **задачи**:

1. Изучить теоретический материал на данную тему.
2. Решить поставленную задачу для частного случая.
3. Решить задачу в общем случае.
4. Провести численный эксперимент на C++ по выяснению точности приближения.
5. Проанализировать и сравнить полученные результаты.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка используемых источников и приложения.

Основное содержание работы. Во Ведении обосновывается актуальность темы работы, формулируются цель бакалаврской работы и решаемые задачи.

В первой главе исследуется теория метода регуляризации А. Н. Тихонова.

Пусть X_1, X_2 — банаховы пространства.

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий из X_1 в X_2 и такой, что A^{-1} существует, но неограничен.

Обозначим через $\overline{u}$ — точное решение. через $\overline{f}$ — точную правую часть уравнения (1). Пусть правая часть $\overline{f}$ задана её δ - приближениями f_δ в пространстве X_2 : $\|f_\delta - \overline{f}\|_{X_2} \leqslant \delta$. Задача приближенного решения уравнения (1) состоит в построении по f_δ последовательности элементов u_δ, такой, что $\|u_\delta - \overline{u}\|_{X_1} \to 0$ при $\delta \to 0$. К такой задаче сводится ряд важных задач математической физики, вычислительной математики, теории интегральных уравнений, а также многие прикладные задачи.

Основополагающими работами в области некорректно поставленных задач являются работы А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева В.К. Иванова.

В них было положено начало теории методов решения уравнений I рода. Эти методы называются методами регуляризации и состоят из двух принципов: I) построение семейства операторов T_α, зависящих от параметра α , действующих из пространства X_2 в пространство X_1 и обладающих свойствами:

1. каждый из операторов T_α определён на всём пространстве X_2,
2. $\|T_\alpha\|_{X_2 \to X_1} < \infty$ при каждом значении α,
3. $$\forall u \in X_1 \ \|T_\alpha Au - u\|_{X_1} \to 0, \text{ при } \alpha \to 0; \tag{2}$$

II) согласование параметра α с погрешностью δ $\alpha = \alpha(\delta)$ такое, что

$$\delta \|T_{\alpha(\delta)}\|_{X_2 \to X_1} \to 0, \text{ при } \delta \to 0. \tag{3}$$

Определение 1. Семейство линейных операторов T_α, $\alpha > 0$ — параметр, удовлетворяющий условиям 1), 2), 3), называется регуляризирующим семейством для уравнения (1); параметр α называется параметром регуляризации. Если соотношение (2) выполняется не на всем пространстве X_1, а для $u \in M \subset X_1$, где M — некоторый класс элементов из X_1, то семейство $\{T_\alpha\}$ называется регуляризирующим на классе M; оператор T_α при фиксированном значении α называется ругуляризирующим оператором.

Если стремление к пределу (2) равномерно относительно $u \in M$,то семейство $\{T_\alpha\}$ называется регуляризирующим равномерно на классе M, а сам класс M называется классом равномерной регуляризации.

Существование регуляризируюшего семейства является достаточным условием для разрешимости задачи приближенного решения уравнения (1). Действительно, из оценки:

$$\|T_\alpha f_\delta - \overline{u}\|_{X_1} \leqslant \delta \|T_\alpha\|_{X_2 \to X_1} + \|T_\alpha A u - \overline{u}\|_{X_1} \tag{4}$$

следует, что параметр α можно так согласовать с погрешностью δ ($\alpha = \alpha(\delta)$), что будет выполняться (3), а отсюда следует стремление к нулю правой части (4) при $\alpha = \alpha(\delta)$, $\delta \to 0$.

Таким образом, метод регуляризации — это метод приближенного решения уравнения (1) с помощью регуляризирующего семейства $\{T_\alpha\}$ при согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, обеспечивающем предельные соотношения (3).Условия же (2),(3) являются достаточными для сходимости приближенного решения $T_{\alpha(\delta)} f_\delta$ к точному.

Будем рассматривать метод регуляризации в применении к уравнению (1) с оператором вложения из $L_2[0,1]$ в $C^{(r-1)}[0,1]$.

Задача приближенного решения — это задача восстановления функции вместе с её производными по δ - приближению в $L_2[0,1]$.

Одним из наиболее известных методов регуляризации является регуляризация Тихонова. Им рассмотрен случай, когда A — интегральный оператор с непрерывным ядром, $X_1 = C^{(r-1)}[a,b]$, $X_2 = L_2[a,b]$, а решение удовлетворяет некоторым дополнительным условиям гладкости: $\overline{u} \in W_2^r[a,b]$, $r \geqslant 1$ — целое, где $W_2^r[a,b]$ — одномерное пространство Соболева с нормой:

$$\|u\|_{W_2^r[a,b]} = \left(\int\limits_a^b \left[\sum_{i=0}^{r} k_i(x)(u^{(i)}(x))^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$k_i(x) > 0$ — непрерывны. В этом методе в качестве операторов T_α выступают операторы

$$T_\alpha f \equiv R_\alpha f = \arg\inf_u M^\alpha[u, f];$$

$$M^\alpha[u, f] = \|Au - f\|^2_{L_2} + \alpha\|u\|^2_{W_2^r[a,b]} \tag{5}$$

Теорема 1 (Тихонова.)**.** Если в уравнении $Au = f$ A — интегральный оператор с непрерывным ядом, $R_\alpha f_\delta = \arg\inf\limits_u M^\alpha_\delta[u, f_\delta]$, а γ_1, γ_2 — константы, независящие от α и δ, такие, что

$$\gamma_1\delta^2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2\delta^2, \tag{6}$$

то $\|R_{\alpha(\delta)} f_\delta - \overline{u}\|_{C^{(r-1)}} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Постановка задачи. Пусть X_1 и X_2 — два банаховых пространства, таких, что $X_1 \subset X_2$ в теоретико-множественном смысле и выполняется оценка $\|\cdot\|_{X_2} \leqslant C\|\cdot\|_{X_1}$. Пусть элемент $u \in X_1$ задан его δ—приближениями u_δ в метрике пространства $X_2 : \|u_\delta - u\|_{X_2} \leqslant \delta$. Требуется по каждому из u_δ построить такой элемент $\widetilde{u_\delta}$, что $\|\widetilde{u_\delta} - u\|_{X_1} \to 0$ при $\delta \to 0$. Будем называть поставленную задачу задачей восстановления из X_2 в X_1.

Такая задача возникает в частности, при обработке исходных данных физических задач. Если, например, $X_1 = C[a, b]$, $X_2 = L_2[a, b]$, то мы приходим к некорректно поставленной задаче восстановления непрерывной функции по её среднеквадратическим δ-приближениям; если $X_1 = C^{(1)}[a, b]$, $X_2 = C[a, b]$ — к задаче восстановления производной функции, заданной её равномерными δ-приближениями, т.е. в последнем случае идёт речь о приближённом решении классической некорректной задачи — задачи дифференцирования.

Поставленную в общем виде задачу восстановления мы будем рассматривать как задачу решения операторного уравнения

$$Au = f, \tag{7}$$

где A — оператор вложения из X_1 в X_2, а правая часть задана её δ-приближениями f_δ в X_2. Существование и единственность решения уравнения (7) тривиальны.

Вывод уравнения Эйлера. Рассмотрим уравнение (7), где A — оператор вложения из $C^{(r-1)}[0,1]$ в $L_2[0,1]$, точное решение имеет абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка($r \geqslant 1$ — целое), а $\overline{u}^{(r)}(x) \in L_2[0,1]$, т.е. $\overline{u}(x) \in W_2^r[0,1]$.

Считаем , что

$$\|\overline{u}^{(r)}\|_{W_2^r} = \left(\int\limits_0^1 \left[\overline{u}^2(x) + (u^{(r)}(x))^2\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Рассмотрим задачу восстановления из $L_2[0,1]$ в $C^{(r-1)}[0,1]$, при этом

$$\|u(x)\|_{C^{(r-1)}} = \max_{0 \leqslant p \leqslant r-1} \|u^{(p)}(x)\|_C. \tag{8}$$

Применим для нахождения приближенного решения метод регуляризации Тихонова

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Семейство операторов R_α соответствующее методу регуляризации Тихонова, имеет вид:

$$R_\alpha f = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^1 G(x,t,-\frac{1}{\alpha})f(t)dt, \tag{9}$$

где $G(x,t,-\frac{1}{\alpha})$ — ядро резольвенты дифференциального оператора $\hat{L}$, порождённого дифференциальным выражением $\hat{l}y = (-1)^r y^{(2r)} + y$ и краевыми условиями: $y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1) = 0,\ k = r,\ldots,2r-1$, со значением спектрального параметра $\lambda = -\frac{1}{\alpha}$.

Сходимость приближенного решения к точному.

Теорема 3. Если $\gamma_1\delta^2 \leqslant \alpha(\delta) \leqslant \gamma_2\delta^2, \gamma_1, \gamma_2$ — некоторые константы, не зависящие от δ, то $\|u_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - \overline{u}(x)\|_{c^{(r-1)}} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Определение функции Грина.

Определение 2. Функцией Грина оператора L называется функция $G(x,\xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $G(x,\xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x вплоть до $(n-2)$-го порядка включительно $\forall\ x$ и $\xi \in [a,b]$;
2. При любом фиксированном $\xi \in [a,b]$ функция $G(x,\xi)$ имеет непрерывные производные $(n-1)$-го и n-го порядка по x в каждом из интервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$, причем производная $(n-1)$-го и n-го порядка имеет при $x=\xi$ скачок $\frac{1}{p_0(\xi)}$:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{p_0(\xi)};$$

3. В каждом из интервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$ функция $G(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет уравнению $l(G)=0$ и краевым условиям $U_\nu(G)=0,\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Теорема 4. Если краевая задача $Ly=0$ имеет лишь тривиальное решение, то оператор L имеет одну и только одну функцию Грина.

Докажем, что это решение существует для любой функции $f(x)$, непрерывной в интервале $[a,b]$, и определяется при помощи функции Грина.

Теорема 5. Если уравнение $Ly=0$ имеет только тривиальное решение, то для любой функции $f(x)$, непрерывной в интервале $[a,b]$, существует решение уравнения $Ly=f$. Это решение задаётся формулой

$$y(x)=\int\limits_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{10}$$

где $G(x,\xi)$ — функция Грина оператора L.

Оператор A, определённый равенством

$$Af(x)=\int\limits_a^b K(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

называется интегральным оператором с ядром $K(x,\xi)$.

Теорема означает, что оператор L^{-1} есть интегральный оператор с ядром $G(x,y)$.

Во **второй главе** получаем интегральное представление регуляризирующего оператора.

Рассматривается задача об обращении дифференциального оператора $\hat{L}$, который определяется дифференциальным выражением

$$\hat{L} : ly = (-1)^r y^{(2r)} + \lambda y, \tag{11}$$

и краевыми условиями:

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1) = 0,\ k = r, \ldots, 2r-1. \tag{12}$$

где $y = y(x),\ f = f(x),\ x \in [0,1],\ \lambda = 1 + \frac{1}{\alpha}$.

Применим равенство (10):

$$y(x) = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) dt,$$

где $G(x,t,\lambda)$ — функция Грина.

Выводим явное выражение для функции Грина. Сначала для частного случая(при $r=1$), а потом и в общем случае.

Теорема 6. Функция Грина (11)-(12) при $r=1$ имеет вид:

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch}\rho t \cdot \operatorname{ch}\rho(1-x)}{\rho \cdot \operatorname{sh}\rho}, & t \leqslant x \\ \frac{\operatorname{ch}\rho x \cdot \operatorname{ch}\rho(1-t)}{\rho \cdot \operatorname{sh}\rho}, & t \geqslant x \end{cases}$$

Теорема 7. Функция Грина (11)-(12) имеет вид: 1) При r — чётном

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{r\rho^{2r-1}\Delta}\operatorname{Re}[A(x,t,\rho) + C(x,t,\rho)], & t \leqslant x \\ -\frac{1}{r\rho^{2r-1}\Delta}\operatorname{Re}[A(x,t,\rho) + D(x,t,\rho)], & t \geqslant x \end{cases}$$

2) При r — нечётном

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{2r\cdot\rho^{2r-1}\cdot\Delta}[(\widetilde{\Delta}_1(t)\cdot e^{\rho x}-\widetilde{\Delta}_{r+1}(t)\cdot e^{-\rho x})+\\ +2\mathrm{Re}[B(x,t,\rho)+C(x,t,\rho)]]+\frac{1}{2r\cdot\rho^{2r-1}}e^{\rho(x-t)}, & t\leqslant x\\ \frac{1}{2r\cdot\rho^{2r-1}\cdot\Delta}[(\widetilde{\Delta}_1(t)\cdot e^{\rho x}-\widetilde{\Delta}_{r+1}(t)\cdot e^{-\rho x})+\\ +2\mathrm{Re}[B(x,t,\rho)+D(x,t,\rho)]]+\frac{1}{2r\cdot\rho^{2r-1}}e^{-\rho(x-t)}, & t\geqslant x\end{cases}$$

$$\text{где } \rho=\sqrt[2r]{\lambda},\ \omega_{2k+1}=\begin{cases}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2r}}, & k=0,\ldots,\frac{r}{2}-1,\ r \text{ — чётное},\\ e^{i\frac{k\pi}{r}}, & k=0,\ldots,\frac{r-1}{2},\ r \text{ — нечётное},\end{cases}$$

$$A(x,t,\rho)=\sum_{k=1}^{\frac{r}{2}}\omega_{2k-1}^r(\widetilde{\Delta}_k(t)\cdot e^{\rho\omega_{2k-1}x}+\widetilde{\Delta}_{r+k}(t)\cdot e^{-\rho\omega_{2k-1}x}),$$

$$B(x,t,\rho)=\sum_{k=1}^{\frac{r+1}{2}}\omega_{2k-1}^r(\widetilde{\Delta}_k(t)\cdot e^{\rho\omega_{2k-1}x}-\widetilde{\Delta}_{r+k}(t)\cdot e^{-\rho\omega_{2k-1}x}),$$

$$C(x,t,\rho)=\Delta\cdot\sum_{k=1}^{\frac{r}{2}}(\omega_{2k-1}^r\cdot e^{-\rho\omega_{2k-1}x}),\ r\text{— чётное},$$

$D(x,t,\rho)=\Delta\cdot\sum_{k=1}^{\frac{r}{2}}(\omega_{2k-1}^r\cdot e^{\rho\omega_{2k-1}x})$, r— чётное. В случае, когда r — нечётное в выражениях $C(x,t,\rho)$, $D(x,t,\rho)$ суммирование по k идёт до $\frac{r+1}{2}$.

Заключение. Полученное выражение для функции Грина краевой задачи (11) – (12) можно непосредственно использовать для нахождения приближённого решения уравнения (1) с оператором вложения вместе с производными до $(r-1)$-порядка.

Тогда приближение для k-ой производной, полученной методом регуляризации будет иметь вид:

$$\frac{d^k u_\delta^\alpha}{dx^k}=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^1\frac{d^k}{dx^k}G(x,t,-\frac{1}{\alpha})f_\delta(t),\ k=0,1,\ldots,r-1.$$

Основные результаты

1. Изучен теоретический материал на данную тему.
2. Найдено решение поставленной задачи для частного и общего случаев.

3. Произведён численный эксперимент на C++ по выяснению точностиr-приближения.
4. Произведены анализ и сравнение полученных результатов.

В **приложении** приводится численный эксперимент по выяснению точности приближения непрерывной функции $f(x)$ оператором, который соответствует методу Тихонова.

Рассматривается функция $f(x) = x^2$. Из теорем 2 и 6 выводим формулу приближения:

$$R_\alpha f = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\operatorname{ch}\rho(1-x)\int\limits_0^x \operatorname{ch}\rho t \cdot t^2 dt}{\rho\cdot\operatorname{sh}\rho} + \frac{\operatorname{ch}\rho x\int\limits_x^1 \operatorname{ch}\rho(1-t)\cdot t^2 dt}{\rho\cdot\operatorname{sh}\rho}\right).$$

Интегрируем и путём реализации кода на C++ производим подсчёты $R_\alpha f$ для $x \in [0.1]$.

Проанализировав и сравнив полученные результаты, приходим к выводу, что при при наименьшем α приближение при помощи оператора R_α даёт наиболее точный результат.