МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ С ПОГРЕШНОСТЬЮ

наименование темы курсовой работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Пивневой Анастасии Александровны
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф-м.н., профессор ________________ Г.В.Хромова
должность, уч. степень, уч.звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор ________________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч.звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Саратов 2021

Введение. Данная работа относится к области некорректно поставленных задач. Теория некорректных задач — направление математики, связанное с самыми разнообразными прикладными проблемами: интерпретацией показаний многих физических приборов, геофизических, геологических, астрономических наблюдений, оптимизацией управления и планирования, синтезом автоматических систем.

Задача математической физики или краевая задача для уравнения с частными производными называется поставленной корректно, если выполняются следующие условия:

1)решение задачи существует;

2)решение задачи единственно;

3)решение задачи непрерывно зависит от данных задачи.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий корректности, называются некорректными или некорректно поставленными.

В работе рассматривается задача восстановления гладких функций, заданных с погрешностью и метод ее решения с помощью сглаживающих интегральных операторов с финитными нормированными ядрами.

Целью бакалаврской работы являются:

1. Изучение теоретического материала по теории некорректно поставленных задач.

2. Разработка численного алгоритма и проведение численного эксперимента.

Работа состоит из введения, трех теоретических разделов, двух разделов практической части, заключения, списка использованных источников и приложения.

Во введении описывается область работы и формулируется общая цель исследования.

В первом разделе рассматриваются основные определения и понятия теории некорректно поставленных задач.

Во втором разделе описываются методы решения некорректно поставленных задач.

В третьем разделе рассматривается постановка задачи восстановления гладких функций, заданных с погрешностью.

В четверном разделе рассматриваются интегральные операторы с финитными нормированными ядрами в задаче восстановления гладких функций.

В пятом разделе реализуется численный алгоритм решения данной задачи.

В приложении приводится код программы на языке программирования C++.

Основное содержание работы. В **первом** разделе «Понятия корректно и некорректно поставленных задач» вводятся основные определения, связанные с теорией некорректных задач.

Корректно и некорректно поставленные задачи относятся к такому широкому классу математических задач, которые возникают в самых различных областях: физике, технике, в частности – задачи обработки результатов физических экспериментов.

Ряд задач математической физики сводится к необходимости решения уравнения вида

$$Au = f, u \in Z, f \in U, \tag{1}$$

которое с подходящими пространствами (конечномерными, функциональными) Z, U, а также с некоторым оператором $A : Z \to U$возникает в различного рода исследованиях. Решение этого уравнения в наиболее важных и интересных случаях является по своей природе неустойчивым по отношению к ошибкам исходных данных — оператора и “правой части”– f или, другими словами, задача решения этого уравнения является некорректно поставленной.

Определение. Пусть в уравнении (1) Z, U — метрические пространства, $A : Z \to U$ - непрерывный оператор. Задачу определения z из уравнения первого рода (1) будем называть корректно поставленной, если:

1) уравнение (1) разрешимо для всех $f \in U$;

2)решение единственно;

3)решение устойчиво по возмущению правой части, т.е. малым в метрике пространства U возмущениям правой части соответствуют и малые в метрике пространства Z возмущения решения u.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному условию корректности, называются некорректными задачами (или некорректно поставленными).

Во **втором** разделе рассматриваются методы решений некорректно поставленных задач.

Метод подбора. Широко распространенным в вычислительной практике способом приближенного решения уравнения (1) является метод подбора. Он состоит в том, что для элементов u некоторого заранее заданного подкласса возможных решений ($\in Z$) вычисляется оператор Au, т. е. решается прямая задача. В качестве приближенного решения берется такой элемент u_0 из множества , на котором невязка $p_U(Au, f)$ достигает минимума, т. е.

$$p_U(Au_0, f) = \inf p_U(Au, f)u \in M$$

Пусть правая часть уравнения (1) известна точно, т. е. $f = f_T$, и требуется найти его решение f_T.

Обычно в качестве берется множество элементов u, зависящих от конечного числа параметров, меняющихся в ограниченных пределах так, чтобы было замкнутым множеством конечномерного пространства. Если искомое точное решение u_T уравнения (1) принадлежит множеству , то $\inf\limits_{u \in M} p_U(Au, f) = 0$ и достигается эта нижняя граница на точном решении u_T. Если уравнение (1) имеет единственное решение, то элемент u_0, минимизирующий $p_U(Au, f)$, определен однозначно.

Метод регуляризации.

Обратные задачи математической физики часто приводят к некорректно поставленным задачам. Типичным примером является уравнение Фредгольма первого рода

$$A[x, u] = \int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x), c \leq x \leq d. \quad (2)$$

Это уравнение имеет решение не для всякой функции $f(x)$. Очевидно, что если $K(x, s)$ имеет определенный порядок гладкости по , то не существует функции $u(s) \in L_2$, удовлетворяющей уравнению (2), если $f(x)$ имеет меньший порядок гладкости. Будем предполагать единственность решения уравнения (2), т. е. предположим, что если для некоторой функции $\tilde{f}(x)$ уравнение (2) имеет решение $\tilde{u}(s)$, то только одно.

Построение алгоритма для получения приближенного решения, равномерно аппроксимирующего $\bar{u}(s)$, базируется на следующем принципе регуляризации: семейство функций $u^{\alpha}(s)$, зависящее от параметра α, мы будем называть *регуляризованным семейством приближенных решений*, если :

1) $f_{\alpha}(x) = A[x, u^{\alpha}(s)] \to \bar{f}(x)$ при $\alpha \to 0$;

2) функции $u^{\alpha}(s)$ при любом α принадлежат компактному классу функций Z, содержащему $\bar{u}(s)$. Регуляризованное семейство приближенных решений равномерно сходится к $\bar{u}(s)$ при$\alpha \to 0$

Сглаживающие функционалы представляют удобный аппарат для решения уравнений второго рода на изолированной точке спектра, а также при решении нелинейных задач.

Квазирешение.

Определение. *Будем называть квазирешением уравнения 1 на заданном компактном множестве пространства U и при заданном f_0 такой элемент $u_0 \in M$, для которого невязка $\|Au - f\|$ достигает минимума на множестве :*

$$min\{\|Au - f_0\| : u \in M\} = \|Au_0 - f_0\|.$$

В этом случае не только приближенная, но и точная правая часть f_0 не обязана принадлежать множеству$N = AM$, поэтому обычное решение может не существовать. Ясно также, что если $f_0 \in N$, то квазирешение совпадает с обычным решением.

Теорема 1. Пусть A - линейный непрерывный оператор, действующий на паре банаховых пространств U, F. Квазирешение уравнения (1) существует для любого непустого компактного множества $M \in U$ и любого $f \in F$. Если выпукло; а сфера в пространстве F строго выпукла, то квазирешение единственно и непрерывно зависит от f, т. е. задача нахождения квазирешения корректна по Адамару.

Введение квазирешения позволяет решить две важные проблемы для некорректно поставленной задачи (1) - проблему существования решения (квазирешения) и проблему построения ругуляризованного семейства приближенных решений в условиях зашумленных данных.

В третьем разделе рассматривается задача восстановления функций $f(t) \in C^k[a,b]$ вместе с ее производной до k – го порядка включительно в случае, когда $f(t)$ задана с погрешностью δ

Для решения данной задачи используются сглаживающие интегральные операторы с финитными нормированными ядрами

$$T_{\alpha k} f = \int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} \varphi_k(\xi - t) f(\xi) d\xi,$$

$$\varphi_k(\eta) = a_k (\eta^2 - \alpha^2)^k.$$

Здесь a_k выбирается из условия нормировки ядра

$$a_k \int\limits_{-\nu}^{\nu} (\eta^2 - \alpha^2)^k = 1.$$

Обозначим

$$T_{\alpha k}^{(i)} f = \int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} \frac{d^i}{dt^i} [\varphi_k(\xi - t)] f(\xi) d\xi,$$

$$i = 0, ..., k, \qquad T_{\alpha k}^{(0)} = T_{\alpha k},$$

и будем в качестве приближений к $f^{(i)}(t)$ рассматривать функции

$$f_{\delta k i}^{\alpha}(t) = T_{\alpha k}^{(i)} f_\delta, \qquad i = 0, ..., k.$$

Поскольку данные функции определены лишь во внутренних точках отрезка $[a,b]$, введем в рассмотрение пространство $C_\varepsilon[a,b]$ непрерывных функций, принимающих постоянные значения на отрезках $[a, a+\varepsilon], [b - \varepsilon, b], \varepsilon > \alpha$, и будем вести речь о сходимости, выборе параметра α и об оптимальности указанных методов. При этом $f(t)$ предполагалась заданной $\delta-$приближением в метрике пространства $L_p[a,b]$, а в качестве сглаживающих операторов рассматривались интегральные операторы с экспоненциальными финитными нормированными ядрами. Отметим, что полученные в данной работе результаты можно без труда вывести и при задании $\delta-$приближения в пространстве $L_p[a,b]$. Равномерная и среднеквадратичная метрики выбраны в связи с тем, что они наиболее характерны для многих физических задач, исходные данные которых получаются с погрешностью.

В **четвертом** разделе представлена практическая часть бакалаврской работы, целью которой является восстановление функции $f(t)$, вместе с её производной до 2-го порядка включительно при различных значениях погрешности.

Рассмотрены операторы:

$$T_{\alpha 1}f = a_1(\alpha)\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(\alpha^2-(t-x)^2)f(t)dt,$$

$$T_{\alpha 2}f = a_2(\alpha)\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(\alpha^2-(t-x)^2)^2f(t)dt,$$

$$T_{\alpha 3}f = a_3(\alpha)\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(\alpha^2-(t-x)^2)^3f(t)dt.$$

В **пятом** разделе представлен алгоритм реализации данного метода. Дана точная функция $f(x)=x^4$. Наша задача - посмотреть, на сколько хорошо сглаживающие интегральные операторы с финитными нормированными ядрами приближает эту функцию.

$$T_{\alpha k}^{(i)}f = \int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha}\frac{d^i}{dt^i}[\varphi_k(\xi-t)]f(\xi)d\xi,$$

$$i=0,...,k.$$

Для проведения численного эксперимента приведен алгоритм моделирования функции $f_{\delta ki}^{\alpha}(x)$ по точно заданной функции $f^{(i)(x)}$. Пусть $f(x)\in C^k[a,b]$. Разобьем отрезок на n частей. Таким образом $[a,b]=x_0,x_1,...,x_n$, где x_j – точки разбиений.

Функцию $f^{(i)}(x)$ заменим набором её значений в узлах, то есть $f^{(i)}(x) = \{f^{(i)}(x_0), f^{(i)}(x_1), ..., f^{(i)}(x_n)\}$.

Параметр α задается зависимостью от δ:

$\alpha(\delta) = \delta^{\frac{2\beta}{(2\beta+1)}}$ – при восстановлении функции,

$\alpha(\delta) = \delta^{\frac{2}{5}}$ – при восстановлении производной,

$\alpha(\delta) = \delta^{\frac{2}{9}}$ – при восстановлении второй производной.

Заключение. Проведенный численный эксперимент показал, что оператор $T_{\alpha k}^{(i)}$ хорошо приближает точную функцию $f^{(i)}(x) = x^4$. При помощи данного оператора был приведен эксперимент по восстановлению функции, было сделано моделирование функции с погрешностью и ее восстановление. Отмечено,что чем больше всплеск у моделируемой функции,тем хуже она восстанавливается. И наоборот. Так же была получена закономерность:чем точнее выбрано δ и формула для согласования α и δ тем точнее результаты вычисления. В работе приводится программа, реализованная на языке C++ и результаты численного эксперимента.