МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

Разработка курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия» для бакалавров педагогического образования (профиль «математическое образование»)

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 323 группы

направление 44.04.01 Педагогическое образование

механико-математического факультета

Москаленко Алены Дмитриевны

Научный руководитель

к.п.н., доцент ____________________ Т. А. Капитонова

подпись, дата

Зав. кафедрой

к.п.н., доцент ____________________ И. К. Кондаурова

подпись, дата

Саратов 2020

Введение. Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования определено, что будущий учитель математики должен быть «способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования», что реализуется в стенах вуза в рамках изучения профессиональных дисциплин, включая и дисциплины предметной подготовки, в частности, курса элементарной математики.

Разделу «Тригонометрия» курса элементарной математики посвящены многочисленные учебные пособия и практикумы для студентов педагогических вузов (Новоселов С.И., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г., Бородуля И.Т., Костаева Т.В., Беляева Э.С., Потапов А.С., Капитонова Т.А., Кондаурова И.К., Лебедева С.В. и другие).

Цель работы – разработать методическое обеспечение для реализации курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия» для бакалавров направления «Педагогическое образование», профиль «Математическое образование».

Для реализации поставленной цели потребуется решить ряд следующих задач:

1. Описать математическое содержание курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия»;
2. Разработать варианты входных, обучающих и итоговых тестов по курсу «Практикум по решению математических задач: тригонометрия».

Методы исследования: изучение нормативных документов, анализ учебной и методико-математической литературы; разработка методических материалов, педагогический эксперимент.

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что разработанный курс может быть использован при обучении бакалавров направления «Педагогическое образование», профиль «Математическое образование» при изучении модуля «Тригонометрия» курса «Практикум по решению математических задач».

Структура магистерской работы: титульный лист, введение, два раздела («Математическое содержание курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия»; «Разработка курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия» для бакалавров педагогического образования (профиль «математическое образование»): практические аспекты», заключение, список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Математическое содержание курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия» посвящен решению первой задачи магистерской работы.

Математическое содержание курс представлено 4 разделами:

– «Тригонометрические функции их свойства и графики. Основные тригонометрические тождества» изучается определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла; основные свойства функций: $cosx$, $sinx$, $tgx, ctgx, secx, cosecx$, а именно область определения, область значений, периодичность, четность/нечетность, интервалы монотонности; дается определение радианной меры угла; рассматриваются основные тригонометрические тождества;

– «Обратные тригонометрические функции» – свойства функций $arcsinx, arccosx, arctgx$и $arcctgx;$

– «Тригонометрические уравнения» – элементарные тригонометрические уравнения, методы решения тригонометрических уравнений: метод разложения на множители, метод ведения новой переменой, метод ведения вспомогательного аргумента;

– «Тригонометрические неравенства» – в разделе представлены методы решения тригонометрических неравенств; свойства элементарных тригонометрических неравенств: $sinx < a, sinx > a, cosx > a, cosx < a, tgx < a, tgx > a, ctgx < a, ctg > a.$

Второй раздел «Курс «Практикум по решению математических задач: тригонометрия» для бакалавров педагогического образования (профиль «математическое образование»): практические аспекты» посвящен решению второй задачи магистерской работы.

В Саратовском национальном исследовательском государственном университете имени Н. Г. Чернышевского предметная подготовка будущих педагогов-математиков реализуется в рамках курсов «Элементарная математика» и «Практикум по решению математических задач».

Цель освоения дисциплины «Практикум по решению математических задач» заключается в «формировании готовности будущего бакалавра педагогического образования к осуществлению педагогической деятельности по реализации образовательного процесса по математике в образовательных организациях основного общего, среднего общего образования; к преподаванию по дополнительным общеобразовательным программам (по математике)».

Дисциплина «Практикум по решению математических задач» изучается в течение 7 семестров (I-VI, VIII) и состоит из 6 модулей, один из которых – «Практикум по решению задач школьного курса тригонометрии» (II семестр).

Трудоемкость модуля «Практикум по решению задач школьного курса тригонометрии» составляет 16 лекционных часов и 32 часа практических занятий.

Для текущего контроля знаний, умений и навыков студентов программой предусматривается следущие формы: контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы; формы промежуточной аттестации: контрольная работа, экзамен.

На современном этапе образования в высшем общеобразовательном учреждении контроль и оценка знаний студентов все чаще обеспечивается при помощи разнообразных тестов.

Целесообразно, на наш взгляд, разнообразить существующие формы контроля и оценки знаний студентов, дополнив их тестами для осуществления диагностического (входного) и итогового контроля знаний, а также разработать обучающие тесты по основным темам раздела «Тригонометрия».

Все содержание курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия» разделено нами на 4 раздела:

1. Тригонометрические функции их свойства и графики. Основные тригонометрические тождества;

2. Обратные тригонометрические функции;

3. Тригонометрические уравнения;

4. Тригонометрические неравенства.

В каждом разделе представлены:

– входные тесты, включающие теоретические вопросы;

– обучающие тесты с практическими заданиями;

Тесты включают в себя задания с выбором одного верного ответа и задания с развернутым ответом.

Структура курса:

1 Инструкция по прохождению курса (кратко знакомит студентов с организацией процесса обучения и сроками выполнения заданий)

2 Раздел 1 «Тригонометрические функции их свойства и графики. Основные тригонометрические тождества»

2.1 Входной тест (представлен двумя вариантами, в каждом по 10 заданий);

2.2 Обучающий тест (представлен одним вариантом с 10 заданиями).

3 Раздел 2 «Обратные тригонометрические функции»

3.1 Входной тест (представлен двумя вариантами, в каждом по 10 заданий);

3.2 Обучающий тест (представлен одним вариантом с 10 заданиями).

4 Раздел 3 «Тригонометрические уравнения»

4.1 Входной тест (представлен двумя вариантами, в каждом по 6 заданий);

4.2 Обучающий тест (представлен одним вариантом с 10 заданиями).

5 Раздел 4 «Тригонометрические неравенства»

5.1 Входной тест (представлен двумя вариантами, в каждом по 6 заданий);

5.2 Обучающий тест (представлен одним вариантом с 10 заданиями).

6 Итоговое тестирование (представлен двумя вариантами с 10 заданиями).

В качестве примера рассмотрим первый вариант входного теста по разделу «Тригонометрические функции их свойства и графики. Основные тригонометрические тождества».

1. Область значений функции $sinx$:

а. $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ б. $[3; \frac{1}{2}]$ в. [0; 1] г. [–1; 1]

2. Функция $\cos x$ периодическая с периодом T =

а. 2π б. $\frac{3\pi}{2}$ в. 0 г. π

3. Область определения функции tgx:

а. $D(x) = R$

б. $D(x) = \left\{x \middle| x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$

в. $D(x) = \left\{x \middle| x \in R, x \neq \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z\right\}$

г. $D(x) = Z$

4. Функция $y = \sec x$ определяется формулой:

а. $\sec x = \frac{1}{ctg\,x}$ б. $\sec x = cosecx + 3$

в. $\sec x = tg^2 x$ г. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

5. Область определения функции $ctgx$:

а. $D(x) = Z$

б. $D(x) = R$

в. $D(x) = \{x | x \in R, x \neq \pi n, n \in Z\}$

г. $D(x) = \left\{x \middle| x \in R, x \neq \frac{\pi}{2} n, n \in Z\right\}$

6. Функция $\cos ec\ x$:

а. нечетная б. четная в. ни четная, ни нечетная

7. Напишите формулу: $sin(2\alpha)$ = ____________________________________.

8. Напишите формулу: $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ = ____.

9. Напишите формулу: $cos(\alpha+\beta)$=____________________________________.

10. Напишите формулу: $\cos\alpha-\cos\beta$=________________________________.

Рассмотрим вариант обучающего теста по разделу «Тригонометрические уравнения».

1. Решите уравнение $cos\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

а. $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k, k\in Z$ б. $(-1)^k\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

в. $\pm\frac{3\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$ г. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

2. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=-\sqrt{3}$.

а. $-\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ \ n\in Z$ б. $\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ \ n\in Z$

в. $\pi+3\pi n, n\in Z$ г.$-\pi+3\pi n, n\in Z$

3. Решите уравнение $\sin 2x=-0{,}5$.

а. $\pm\frac{\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$ б. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi k,\ k\in Z$

в. $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$ г. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

4. Решите уравнение $\operatorname{tg}4x+1=0$.

а. $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$ б. $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$

в. $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$ г. $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$

5. Решите уравнение $\sin 2x=1$.

а. $\pi k,\ k\in Z$ б. $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

в. $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ г. $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

6. Решите уравнение $-2\cos x=0$.

а. $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ б. $2\pi k,\ k\in Z$ в. $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$ г. $\pi+2\pi k, k\in Z$

Ключ к обучающему тесту:

Задание	1	2	3	4	5	6
Ответ	а	г	б	а	в	а

7. Решите уравнение $sinx + \sqrt{3}cosx = \sqrt{2}$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$, получим уравнение $\frac{1}{2}sinx + \frac{\sqrt{3}}{2}cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Приняв $cosa = \frac{1}{2}$, $sina = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $a = \frac{\pi}{3}$, будем иметь $cos\frac{\pi}{3}sinx + sin\frac{\pi}{3}cosx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

8. Решите уравнение $10sin^2 2x + 7cos2x - 4 = 0$.

Решение. Заменим $sin^2 2x$ на $1 - cos^2 2x$, получим $10(1 - cos^2 2x) + 7cos2x - 4 = 0$, $10cos^2 2x - 7cos2x - 6 = 0$. Приняв $t = cos2x$, $-1 \leq t \leq 1$, получим квадратное уравнение $10t^2 - 7t - 6 = 0$. Его корни $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_1 = \frac{6}{5}$. Подходит $t_1 = -\frac{1}{2}$. Тогда $cos2x = -\frac{1}{2}, 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \epsilon Z$.

9. Решите уравнение $2sin^2x - 3sinxcosx + cos^2x = 0$.

Решение. Разделим обе части на cos^2x, получим уравнение $2tg^2x - 3tgx + 1 = 0$. Приняв $t = tgx$, получим $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Его корни $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = 1$. Решив простейшие уравнения $tgx = \frac{1}{2}$, $tgx = 1$, будем иметь окончательно: $x_1 = arctg\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$,$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

10. Решите уравнение $sin2x = 2sinx - cosx + 1$

Решение: $sin2x = 2sinx - cosx + 1$, $2sincosx - 2sinx + cosx - 1 = 0$,

$2sin\,(cosx - 1) + cosx - 1 = 0$, $(cosx - 1)(2sinx + 1) = 0$, откуда имеем

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 1, \\ sinx = -\frac{1}{2}. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Рассмотрим пример первого варианта итогового теста.

1. Упростите выражение: $\frac{sin4a - sin6a}{cos5asina}$.

а. –2 б. $2sina$ в. $-2sina$ г. $2cosa$

2. В каком ответе знаки $cos870^{\circ}$, $\sin(-490^{\circ})$ и $tg670^{\circ}$ приведены в правильном порядке?

а. – + – б. + – – в. – – + г. – – –

3. Найдите tga, если $tg\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{1}{3}$.

а. $\frac{1}{2}$ б. – 3 в. $\frac{1}{3}$ г.3

4. Определите значение $\frac{2\text{sina} + \text{sin2a}}{2\text{sina} - \text{sin2a}}$, если $cosa = -\frac{1}{3}$.

а. $\frac{3}{2}$ б. $\frac{1}{2}$ в. 3 г. $\frac{2}{3}$

5. В каких из указанных четвертей должна быть взять α, чтобы выполнялось $sinacosa > 0$?

а. I или IV б. II или III в. I или II г. I или IIII

6. Косинус суммы двух углов треугольника равен $-\frac{1}{3}$. Найдите косинус третьего угла.

а. $\frac{2}{3}$ б. $\frac{1}{3}$ в. $\frac{\pi}{3}$ г. $-\frac{2}{3}$

7. Решите уравнение: $2cos^2(x-\pi) - 3\sin(\pi + x) = 3$.

а. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ б. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

в. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ г. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Ключ к первому варианту итогового теста:

Задание	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	а	г	а	б	г	б	г

8. Решите уравнение: $\frac{1}{cos^2x} + \frac{3}{cosxsinx} + \frac{1}{sin^2x} = 4$.

Решение. Используем тождества

$$1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2x};\ 1 + ctg^2x = \frac{1}{sin^2x};\ \frac{1}{cosx}\cdot\frac{1}{sinx} = tgx + ctgx$$

Тогда $1 + tg^2x = 3(tgx + ctgx) + \ 1 + ctg^2x = 4;$

$$(tg^2x + 1 + ctg^2x + 2) + 3(tgx + ctgx) - 4 = 0;$$

$$(tgx + ctgx)^2 + 3(tgx + ctgx) - 4 = 0.$$

После подстановки $tgx + ctgx = t$ получим $t^2 + 3t - 4 = 0$, откуда $t_1 = -4, t_2 = 1$. Тогда $tgx + ctgx = 1;\ \ tgx + \frac{1}{tgx} = 1;\ \ tg^2x - tgx + 1 = 0.$

Дискриминант этого квадратного относительно tgx уравнения отрицателен, следовательно, $x \in \emptyset$.

Пусть теперь $tgx + ctgx = -4$

$$\frac{sinx}{cosx} + \frac{cosx}{sinx} = -4;\ \frac{1}{sinxcosx} = -4;\ \ sinxcosx = -\frac{1}{4};$$

$$sin2x = -\frac{1}{2}; 2x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n; x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}.$$

9. Решите неравенство $tg^2x - 4tgx + 3 \leq 0$.

Решение. Область определения $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi$. Представив неравенство в виде $(tgx - 1)(tgx - 3) \leq 0$, получим двойное неравенство $1 \leq tgx \leq 3$, равносильное данному. Значит, $\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq arctg3 + \pi n\ (n \in Z)$.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} sinx > \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ cosx \leq \ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Решение. Решим простейшие неравенства с помощью формул общих решений.

$$x\epsilon\ (arcsin\, a + \ 2\pi n;\ \ \pi - arcsin\, a + 2\pi n), n\epsilon Z$$

$$x\epsilon\ (arccos\, a + \ 2\pi n;\ \ 2\pi - arccos\, a + 2\pi n), n\epsilon Z$$

Для наших неравенств имеем два промежутка решений:

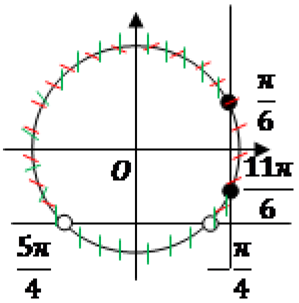
1. $x\ \epsilon\ \left(arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ 2\pi n;\ \pi - arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n\right), n\epsilon Z;$

$x\ \epsilon\ \left(-\frac{\pi}{4} + \ 2\pi n;\ \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)\ \Rightarrow x\ \epsilon\ \left(-\frac{\pi}{4} + \ 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right).$

2. $x\ \epsilon\ \left(arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \ 2\pi n;\ 2\pi - arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n\right), n\epsilon Z;$

$x\ \epsilon\ \left(\frac{\pi}{6} + \ 2\pi n;\ 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \Rightarrow [\frac{\pi}{6} + \ 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n].$

Для этих двух промежутков необходимо указать пересечение. Изобразим это на тригонометрической окружности:



Видно, что пересечением областей решений является промежуток:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \; n\epsilon Z.$$

Экспериментальная проверка разработанных материалов проводилась во II семестре 2019-2020 учебного года в очном и дистанционном режимах в 162 группе механико-математического факультета СГУ им. Н.Г. Чернышевского.

По результатам опытно-экспериментальной работы можно сделать следующие выводы:

1. Успешнее всего студенты справились с входным тестом раздела «Обратные тригонометрические функции», но в нем все же были допущены ошибки. В данном тесте многие студенты не смогли выполнить задания под номерами (9) и (10) которые заключались в том, чтобы дать определение арккосинуса, арксинуса, арктангенса и арккотангенса числа a.

2. Хуже всего студенты справились с входным тестом раздела «Тригонометрические неравенства». То есть у студентов есть пробелы в знаниях свойств элементарных тригонометрических неравенств: $sinx < a, sinx > a, cosx > a, cosx < a, tgx < a, tgx > a, ctgx < a, ctg > a$.

3. При проведении итогового теста был выявлен ряд заданий, по которым было допущено наибольшее количество ошибок. К ним относятся задания под номерами (8) Решите уравнение: $\frac{1}{cos^2x} + \frac{3}{cosxsinx} + \frac{1}{sin^2x} = 4$, (9) Решите неравенство $tg^2x - 4tgx + 3 \leq 0$, решите неравенство $\sqrt{2sinx - 1}(cos2x - 1) \geq 0$, (10) Решите систему неравенств $\begin{cases} sinx > -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ cosx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Заключение. В представленной магистерской работе получены следующие результаты:

1. Описано математическое содержание курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия». Курс состоит из 4 разделов:

– «Тригонометрические функции их свойства и графики. Основные тригонометрические тождества»;

– «Обратные тригонометрические функции»;

– «Тригонометрические уравнения»;

– «Тригонометрические неравенства».

2. В ходе анализа рабочей программы дисциплины «Практикум по решению математических задач» для бакалавров направления «Педагогическое образование», (профиль «Математическое образование») выявлена необходимость разнообразить представленные в программе формы текущего контроля по разделу «Тригонометрия», дополнив их тестовыми заданиями.

3. Для каждого раздела курса «Практикум по решению математических задач: тригонометрия» разработаны:

– варианты входных тестов;

– варианты обучающих тестов с заданиями разной степени сложности.

Разработаны два варианта итогового теста для промежуточной аттестации по курсу «Практикум по решению математических задач: Тригонометрия».

Список использованных источников состоит из 27 наименований.