МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Балашовский институт (филиал)

Кафедра математики, информатики, физики

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 152 группы
направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)»,
профили «Математика и физика»,
факультета математики и естественных наук
Кузнецовой Екатерины Александровны

Научный руководитель
доцент кафедры математики, информатики,
физики_______________Н. В. Бурлак
(подпись, дата)
Зав. кафедрой математики, информатики, физики
кандидат педагогических наук,
доцент ____Е. В. Сухорукова
(подпись, дата)

Балашов 2020

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В школьном курсе математики уравнениям уделяется достаточно много времени. Знакомство с уравнениями начинается еще в начальной школе, затем линия уравнений расширяется и углубляется. Так, в 8 классе изучаются квадратные уравнения, которые используются на уроках математики и физики вплоть до окончания обучения. Важно вооружить учащихся различными способами и методами решения квадратных уравнений. Для решения таких уравнений используются аналитический, графический и геометрический способы.

Уравнения могут быть достаточно сложными и требующими нестандартного подхода к решению. Такие уравнения включаются часто в олимпиадные и конкурсные задания.

Проблематикой включения нестандартных задач по теме «Квадратные уравнения» в образовательный процесс занимались Г.В. Дорофеев [2], С.М. Никольский [3], Л.Г. Петерсон [7] и другие. Нестандартным задачам по той же теме, как компоненту подготовки к олимпиаде по математике, уделялось внимание в трудах Н.Х. Агаханова [1], [16], Н.В. Горбачева [10], Ю.В. Лепехина [15]. Задача учителя заключается в том, чтобы научить школьников с наибольшей эффективностью решать и стандартные квадратные уравнения, и нестандартные задания по этой теме.

Цель бакалаврской работы – рассмотреть разновидности задач, сводящихся к решению квадратных уравнений.

В соответствии с целью поставлены следующие **задачи**:

1. Изучить исторические сведения о квадратных уравнениях.

2. Выделить способы решения квадратных уравнений.

3. Проанализировать задачный материал по теме «Квадратные уравнения» в школьных учебниках.

4. Подобрать и решить примеры задач, в том числе нестандартных и повышенной сложности по теме «Квадратные уравнения».

Объект исследования – процесс изучения алгебраического материала в основной школе.

Предмет исследования – изучение квадратных уравнений в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость исследования заключается в том, что материалы бакалаврской работы могут быть использованы на уроках математики при изучении темы «Квадратные уравнения», во внеурочной деятельности при подготовке учеников к олимпиадам и конкурсам по математике.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе «Квадратные уравнения: основные понятия и способы решения» представлены исторические сведения о квадратных уравнениях, определены алгебраические способы нахождения корней квадратного уравнения, а также проанализированы графические способы решения уравнений.

Квадратные уравнения уходят корнями в историю, начиная с Древнего Вавилона. В Европе развитие квадратных уравнений связано с именами Л. Фибоначчи, Ф. Виета и других математиков, но классический вид квадратные уравнения получили уже благодаря ученым Р. Декарту и И. Ньютону.

Самый распространенный способ нахождения корней квадратного уравнения – через дискриминант: $D = b^2 - 4ac$, при этом корни вычисляются по формуле: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. При чётном коэффициенте b рационально использовать формулу: $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ $(b = 2k)$.

Нередко в квадратных уравнениях можно проследить закономерности:

а) Сумма старшего коэффициента и свободного члена равна второму коэффициенту. В этом случае корни равны: $x_1 = -\frac{c}{a}$; $x_2 = -1$.

б) Сумма всех коэффициентов равна нулю. Тогда корни равны: $x_1 = \frac{c}{a}$; $x_2 = 1$.

Решать квадратные уравнения также помогает и умение выделять полный квадрат суммы (разности).

Не стоит забывать и о прямой теореме Виета и обратной ей, которые позволяют решать приведённые квадратные уравнения устно, не прибегая к вычислениям по классической формуле.

Кроме алгебраических, часто используются графические способы решения.

Графический способ решения может давать только приближенные значения. Но, в его защиту можно сказать, что он имеет большую методическую ценность. Он позволяет повторить построение графиков элементарных функция, свойства этих функций, дать наглядную информацию о количестве и расположении действительных корней уравнения. Выделяют несколько разновидностей графического метода.

В общем виде графические способы имеют следующий механизм: в одной системе координат строятся графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и осуществляется поиск абсцисс общих точек данных графиков, в результате числа, которые были найдены, и представляют собой корни уравнения.

Графический способ решения квадратных уравнений располагает 5 вариантами:

1.Чтобы решить графически квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ первым способом, осуществляется построение графика функции
$y = ax^2 + bx + c$ и поиск абсцисс точек пересечения этого графика с осью Ox. Это самый лёгкий способ, требующий умения строить график параболы.

Следующие варианты предполагают построение квадратичной и линейной функции в одной системе координат.

2. Чтобы решить уравнение графически, но другим способом, осуществляется «трансформация» к виду $ax^2 = -bx - c$ и построение в одной системе координат графиков квадратичной функции $y = ax^2$ и линейной функции $y = -bx - c$, далее происходит поиск абсциссы точек их пересечения.

3. Можно выделить еще один вариант графического решения квадратного уравнения, предполагающий преобразование уравнения к следующему виду: $a(x + l)^2 + m = 0$ с применением метода выделения полного квадрата суммы (разности). Далее осуществляется преобразование в уравнение $a(x + l)^2 = -m$. Затем происходят построения графиков функций $y = a(x + l)^2$, который представляет собой график функции $y = ax^2$, который был смещён на $|l|$ единиц вправо или влево согласно знаку, и прямой $y = -m$, которая параллельна оси Ox. Корни уравнения – абсциссы точек пересечения параболы и прямой.

4. Если квадратное уравнение привести к виду $ax^2 + c = -bx$, то возможен еще один вариант графического решения через построение двух графиков функций:

1) $y = ax^2 + c$. Данный график представляет собой график функции $y = ax^2$, который смещён на c единиц вверх при $c > 0$ или вниз в противном случае;

2) $y = -bx$.

После построения осуществляется поиск абсцисс их общих точек. Данный способ продемонстрирован на примере 1.

Пример 1. Найти корни уравнения $3x^2 - x - 4 = 0$.

Решение. Нужно преобразовать уравнение к виду $3x^2 - 4 = x$. Далее нужно уравнение разбить на две функции $y = 3x^2 - 4$ и $y = x$. Графики отражены на рисунке 1.

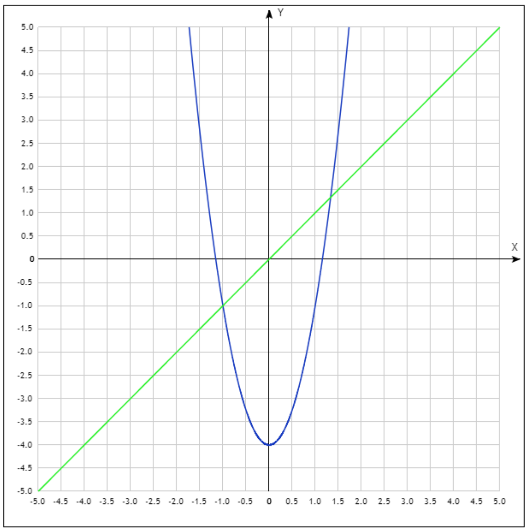

Рисунок 1 – Графическое решение уравнения $3x^2 - x - 4 = 0$

Как видно из рисунка 1, графики пересекаются в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{4}{3}$, что говорит о том, что у уравнения, данного в примере, два действительных корня.

Самый сложный и необычный метод представлен ниже. Он заключается в построении графиков прямой и гиперболы в одной координатной плоскости.

5. Данный метод предполагает преобразование к следующему виду: $\frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x} = \frac{0}{x} \to ax + b + \frac{c}{x} = 0 \to ax + b = -\frac{c}{x}$.

После преобразований осуществляется построение графиков линейной функции $y = ax + b$ и гиперболической функции $y = -\frac{c}{x}$ $(c \neq 0)$, после чего производится поиск абсцисс точек пересечения данных графиков (стоит отметить, что при $c = 0$ данный метод не используется).

Пример 2. Найти корни уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Решение. Сначала необходимо преобразовать уравнение, в результате чего оно обретёт следующий вид: $x + 3 - \frac{4}{x} = 0 \to x + 3 = \frac{4}{x}$. Далее нужно разбить уравнение на две функции: $y = x + 3$ и $y = \frac{4}{x}$. Сами графики представлены на рисунке 2.

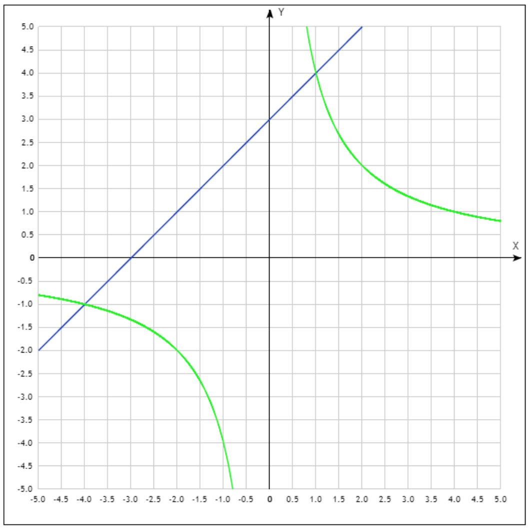

Рисунок 2 – Графическое решение уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$

Как видно из рисунка 2, графики пересекаются в точках $x_1 = -4$ и $x_2 = 1$, что говорит о том, что у уравнения два действительных корня.

Во второй главе «Методические рекомендации по использованию квадратных уравнений при решении задач» рассматриваются стандартные и нестандартные задачи по теме «Квадратные уравнения», приведены примеры нестандартных задач с прикладной направленности, на применение теоремы Виета, квадратные уравнения с модулем и задачи с параметром.

Во всех УМК по математике рассматриваются задачи по теме «Квадратные уравнения», представленные в трёх уровнях сложности: базовый, повышенный и высокий.

В учебниках также встречаются и задания высокого уровня сложности, которые относятся к нестандартным задачам. К ним же относятся и олимпиадные задачи.

Главная цель использования нестандартных задач по любой теме курса математики – воспитание у обучающихся таких качеств как творческий подход, нетрадиционное мышление и умение изучить проблему с разных сторон.

Нестандартные задачи помогают в развитии мышления, в формировании и развитии умения объяснять ход своих мыслей и доказывать правильность своих выводов, они учат детей собраться интеллектуально и искать выход в безвыходной, на первый взгляд, ситуации.

Практические задачи с прикладным содержанием помогают наладить межпредметные связи, к примеру, следующая задача показывает тесную связь математики и физики.

Пример 3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $40\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Через сколько секунд оно окажется на высоте 60 м?

Решение. Из курса физики известно, что без учета сопротивления воздуха высота $h\,(\text{м})$, на которой брошенное вертикально вверх тело окажется через $t\ (c)$, может быть найдена по следующей формуле: $h_0 = u_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где $u_0\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$ – начальная скорость, g – ускорение свободного падения, которое приблизительно равно $10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Применив формулу и подставив значения, следует: $60 = 40 - 5t^2$. Отсюда следует, что $5t^2 - 40t + 60 = 0 \to t^2 - 8t + 12 = 0$.

Решая это уравнение, получим корни: $t^2 - 8t + 12 = 0 \to D = 16$, $t_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2}$; $t_1 = 2$; $t_2 = 6$.

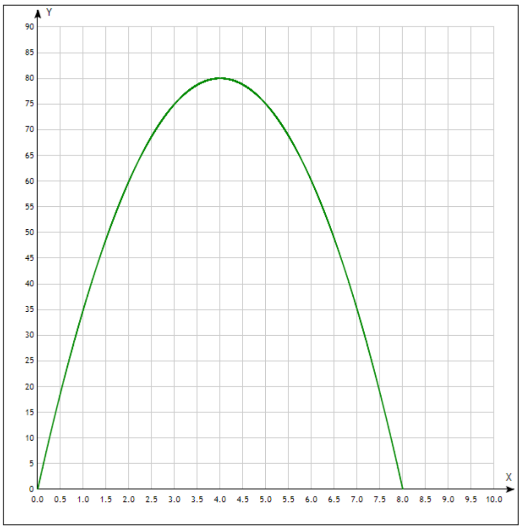

Рисунок 3 – График зависимости высоты от времени: $h = 40 - 5t^2$

Как видно из рисунка 3, в течение первых четырех секунд тело, которое брошено вертикально вверх, достигает высоты 80 метров, а затем падает. На высоте 60 метров данное тело оказывается дважды: через 2 секунды и через 6 секунд после броска. Это говорит о том, что оба найденных корня являются решением данной задачи.

Ответ. $t_1 = 2$ с, $t_2 = 6$ с.

Интересны задачи с квадратными уравнениями на применение теоремы Виета.

Пример 4. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого?

Решение. Согласно теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \\ x_1 x_2 = a^3 \end{cases} \underset{x_1 = x_2^2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_2^2 + x_2 = \frac{15}{4} \\ x_2^3 = a^3 \end{cases}$.

Затем: $x_2^2 + x_2 = \frac{15}{4} \leftrightarrow x_2^2 + x_2 - \frac{15}{4} = 0$; $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{15}{4}\right) = 16$. Корни уравнения: $x_{2_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 4}{2}$. Отсюда следует: $x_{2_1} = -\frac{5}{2}$; $x_{2_2} = \frac{3}{2}$.

Исходя из этого, $x_2^3 = a^3 \leftrightarrow a^3 = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 \leftrightarrow a = -\frac{5}{2}$. Также $x_2^3 = a^3 \leftrightarrow a^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

Ответ. $a = -\frac{5}{2}$; $a = \frac{3}{2}$.

В конкурсных, олимпиадных заданиях по математике, в заданиях ОГЭ предлагаются квадратные уравнения с модулем и с параметрами.

Пример 5. Решить уравнение $|x^2 - 5x + 2| = 2$.

Решение. 1) $x^2 - 5x + 2 = -2 \leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$; $D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$. Корни уравнения: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

2) $x^2 - 5x + 2 = 2 \leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \leftrightarrow x(x-5) = 0 \leftrightarrow x_3 = 0$; $x_4 = 5$.

Ответ. $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 4; x_4 = 5$.

Успешное решение заданий с параметрами требует высокого умения обобщения и систематизации знаний, их применения в нестандартной ситуации, а также проявления креативности и творческой активности.

Пример 6. Для каждого значения a решите уравнение:

$x^2 + (3a+1)x + 2a^2 + a = 0.$

Решение. Необходимо понимать, что $b = 3a + 1$, а $c = 2a^2 + a$. Исходя из этого, необходимо вычислить дискриминант: $D = b^2 - 4ac = (3a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a^2 + a) = 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 4a = a^2 + 2a + 1$. В результате $D = a^2 + 2a + 1$. Сам по себе дискриминант может быть больше или меньше нуля, а также равен ему. Необходимо начать рассмотрение с последнего случая, поскольку будет известно, при каких числах дискриминант будет принимать какое-либо значение.

$a^2 + 2a + 1 = 0;\ D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0;\ a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -1 \rightarrow a_1 = -1;\ a_2 = -1.$

Отсюда следует, что при $a = -1$ и дискриминант является нулевым, и уравнение будет иметь один корень.

При $a = -1$ он будет равен: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$ Дискриминант будет положительным, и уравнение будет иметь два действительных корня при и $a > -1$. Дискриминант будет отрицательным, и уравнение не будет располагать корнями.

Ответ.

1) $D > 0$: $a > -1$;

2) $D = 0$: $a_{1,2} = -1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема «Квадратные уравнения» достаточно типичная, но на её изучение отводится большое количество времени. Каждому ученику необходимо владеть навыками решения стандартных квадратных уравнений. Ведь это умение позволяет развивать алгоритмическое мышление. Однако же для углубленного изучения математики важны также нестандартные, не типичные задачи.

Целью бакалаврской работы было рассмотрение разновидности задач, сводящихся к решению квадратных уравнений. Она достигнута благодаря тому, что проанализировано большое количество различных источников.

В результате исследования была проанализирована литература по теме исследования, было расширено представление о квадратных уравнениях и способах их решения, выявлены типы стандартных и нестандартных задач.

Изучены исторические сведения о квадратных уравнениях. Было выяснено, что квадратные уравнения уходят корнями в историю, начиная с Древнего Вавилона. В Европе развитие квадратных уравнений связано с именами Л. Фибоначчи, Ф. Виета и других математиков, но классический вид квадратные уравнения получили уже благодаря ученым Р. Декарту и И. Ньютону.

Были выделены алгебраические, графические и геометрический способы решения уравнений. Алгебраические способы являются универсальными. Самыми распространенными способами решения являются нахождение корней через дискриминант и с помощью теоремы Виета.

Графический способ решения может давать только приближенные значения. Но, в его защиту можно сказать, что он имеет большую методическую ценность. Он позволяет повторить построение графиков элементарных функция, свойства этих функций, дать наглядную информацию о количестве и расположении действительных корней уравнения. Выделяют несколько разновидностей графического метода.

Также был проанализирован задачный материал по теме «Квадратные уравнения» в школьных учебниках и решены примеры нестандартных задач и задач повышенной сложности.

Материалы бакалаврской работы можно использовать на уроках математики при изучении темы «Квадратные уравнения», при подготовке учеников к олимпиадам по математике и математическим конкурсам.

30.05.2020 /Кузнецова Е. А.