МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

Логарифмические уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета
Губер Светланы Сергеевны

Научный руководитель
к.п.н., доцент ______________________ Капитонова Т.А.
подпись, дата

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ______________________ Кондаурова И.К.
подпись, дата

Саратов 2020

Введение. Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике представляет собой форму государственной итоговой аттестации, проводимой в целях определения соответствия результатов освоения обучающимися основных образовательных программ среднего общего образования по математике соответствующим требованиям федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС). Для указанных целей используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы заданий стандартизированной формы.

Впервые эксперимент по введению ЕГЭ был проведён в 2001 году. С 2001 года по 2008 год назначением ЕГЭ по математике было определение уровня подготовки выпускников средней (полной) общеобразовательной школы по алгебре и началам анализа с целью государственной (итоговой) аттестации и отбора при поступлении в ссузы и вузы.

С 2009 года итоги экзамена по математике при получении любого удовлетворительного результата, не влияют на отметку по математике в аттестате о среднем (полном) общем образовании.

Начиная с 2015 года, произошли изменения, в соответствии с Концепцией развития математического образования в Российской Федерации, экзамен разделили на два уровня: профильный и базовый. Ученики выбирают себе нужный вариант. Могут выбрать сразу оба.

В ЕГЭ по математике базового уровня основное внимание уделяется проверке элементарных знаний и умения пользоваться ими в жизни, а в экзамене профильного – акцент делается на разделах, которые позже будут углубленно изучаться в вузах на технических, технологических, экономических и естественно-научных факультетах.

Умение решать логарифмические уравнения и неравенства является требованием к предметным результатам освоения углубленного курса математики в соответствии с ФГОС среднего (полного) общего образования.

Анализ результатов ЕГЭ показывает, что обучающиеся испытывают определенные трудности в решении логарифмических уравнений и неравенств. Это является следствием того, что на изучение и отработку навыков по решению логарифмических уравнений и неравенств, в школьном курсе математики отведено мало учебного времени, этим объясняется актуальность данной темы.

Логарифмическим уравнениям и неравенствам посвящены многочисленные учебники и учебные пособия (Т. В. Костаева, П. Ф. Севрюков, Б. П. Гейдман, В. В. Вавилов, Я. В. Делюкова и др.), а также сборники задач (И. Т. Бородуля, В. П. Моденов, А. П. Карп, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович, В. Я. Солодухин и др.).

Вопросами, связанными с логарифмическими уравнениями и неравенствами на ЕГЭ и методами их решения занимались: Ю. В. Садовничий, С. С. Самарова, И. Ф. Войдилова и другие математики и методисты.

Исследованием результатов ЕГЭ в целом, и решением логарифмических уравнений и неравенств с параметрами, в частности, а также определением типичных ошибок, выявление их причин и способов их устранения занимаются: П. И. Самсонов, И. В. Ященко, М. Б. Шашкина , Н. А. Журавлева, И. Г. Малышев, Я. В. Делюкова и другие.

В настоящее время представлено достаточное КИМов с типовыми вариантами заданий ЕГЭ: Р. И. Высоцкий, Ф. Ф. Лысенко, И. В. Ященко и другие, по которым обучающиеся могут готовиться к экзаменам.

Цель бакалаврской работы – рассмотреть методы решения логарифмических уравнений и неравенств и разработать методические материалы для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике по теме «Логарифмические уравнения и неравенства».

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие задачи:

1. Описать основные понятия и методы решений логарифмических уравнений и неравенств.

2. Выявить место логарифмических уравнений и неравенств в экзаменационной модели ЕГЭ по математике.

3. Разработать серию упражнений для подготовки к ЕГЭ базового уровня и методические рекомендации для решения логарифмических уравнений и неравенств с параметрами на ЕГЭ профильного уровня.

Методы исследования: анализ методико-математической литературы, изучение нормативных документов, разработка методических материалов.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования разработанных методических материалов при обучении учащихся 11 классов решению логарифмических уравнений и неравенств на уроках и при подготовке к ЕГЭ.

Структура работы: титульный лист; введение; два раздела («Логарифмические уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ: теоретические аспекты»; «Логарифмические уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ: практические аспекты»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Логарифмические уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ: теоретические аспекты» посвящен решению первой задачи бакалаврской работы.

Определение 1. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или в его основании, называется логарифмическим уравнением.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$, где a, b – положительные числа, причем $a \neq 1,$ а x – неизвестная (переменная) величина.

Определение 2. Областью определения уравнения называется множество значений переменной x, при которых обе части уравнения имеют смысл.

Область определения простейшего логарифмического уравнения – множество $(0;\ +\infty)$.

Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0, g(x) > 0$.

Переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ может привести к появлению посторонних корней. Посторонние корни можно определить с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, или с помощью нахождения области определения уравнения.

При решении логарифмических уравнений используются следующие методы:

1. Решение уравнений, основанных на определении логарифма;
2. Применение основного логарифмического тождества;
3. Решение уравнений с помощью потенцирования;
4. Введение новой переменной;
5. Логарифмирование обеих частей уравнения;
6. Переход от одного основания логарифма к другому;

Рассмотрены примеры на каждый из этих методов, приведем один.

Пример. Решить уравнение: $\log_7 x - \log_x 7 = 2{,}5$.

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Приведем логарифмы к одному основанию 7: $\log_7 x - \frac{1}{\log_7 x} = \frac{5}{2}$ и делаем замену: $t = \log_7 x$. Получаем уравнение $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, или $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда находим: $t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$. Возвращаемся к переменной x, получаем: $\log_7 x = 2$, $x = 49$, и $\log_7 x = \frac{1}{2}, x = \sqrt{7}$. Оба найденных значения удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $x_1 = \sqrt{7}, x_2 = 49$.

Определение 3. Логарифмическим неравенством называется неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании.

Определение 4. Областью определения неравенства называется множество значений переменной x, при которых обе части неравенства имеют смысл.

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве монотонности логарифмической функции.

I. Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Решение неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $(\geq, <, \leq)$ с учетом характера монотонности логарифмической функции сводится к одному из следующих случаев.

1. При $0 < a < 1$ оно равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

2. При $a > 1$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Пример. Решить неравенство $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) < \log_3(5x+1)$.

Решение неравенства сводится к решению следующей системы неравенств $\begin{cases} \log_3\big((x-1)(x+5)\big) < \log_3(5x+1), \\ x-1 > 0, \\ x+5 > 0; \end{cases}$, так как 3 > 1, то получаем:

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x+5 > 0, \\ (x-1)(x+5) < 5x+1; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ (x+2)(x-3) < 0; \end{cases}$$

Ответ. (1;3).

II. Неравенства вида $f(\log_a x) > 0$.

Если неравенство можно привести к виду $f(\log_a x) > 0$ $(\geq, <, \leq)$, то при помощи замены переменной $t = \log_a x$, его можно свести к решению неравенства вида $f(t) > 0$ $(\geq, <, \leq)$.

Пример. Решить неравенство: $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$.

Решение. $2\log_5 x - 3\log_x 5 < 1$, $2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} < 1$.

Обозначим $\log_5 x = t$, тогда неравенство примет вид $2t - \frac{3}{t} - 1 < 0$, или

$$\frac{2t^2 - t - 3}{t} < 0, \left[\begin{array}{l} t > -1, \\ 0 < t < \frac{3}{2.} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x < -1, \\ 0 < \log_5 x < \dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{5}, \\ 1 < x < \sqrt{125}. \end{array}\right.$$

Ответ. $(0;\frac{1}{5}) \cup (1;\sqrt{125})$.

III. Неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$.

Пусть дано логарифмическое неравенство с переменным основанием: $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$.

Оно равносильно следующей совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Аналогично решение логарифмического неравенства $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ сводится к одному из случаев:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим другой способ решения неравенства такого типа.

При $a > 1$ неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно неравенству $\frac{\log_a f(x)}{\log_a h(x)} > \frac{\log_a g(x)}{\log_a h(x)}$, которое можно переписать в виде: $\frac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{\log_a h(x)} > 0$.

Последнее неравенство равносильно совокупности системе неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0,\\ \qquad \log_a h(x) > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\log_a f(x) - \log_a g(x) < 0,\\ \qquad \log_a h(x) < 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример. Решить неравенство: $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

Решение. $\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3)$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < 2x+3 < 1,\\ x^2 > 2x+3;\end{cases}\\ \begin{cases}2x+3 > 1,\\ x^2 < 2x+3,\\ x^2 > 0;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{3}{2} < x < -1,\\ x^2 - 2x - 3 > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x > -1,\\ x^2 - 2x - 3 < 0,\\ x \neq 0;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\dfrac{3}{2} < x < -1,\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<-1;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x > -1,\\ -1 < x < 3,\\ x \neq 0;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}-\dfrac{3}{2} < x < -1,\\ -1<x<0,\\ 0<x<3.\end{array}\right.$$

Ответ. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

Второй раздел «Логарифмические уравнения и неравенства в материалах ЕГЭ: практические аспекты» посвящен решению второй и третьей задач бакалаврской работы.

Анализ КИМов ЕГЭ по математике показывает, что логарифмические уравнения и неравенства постоянно присутствуют в экзаменационных вариантах.

Начиная с 2001 г., среди задач с выбором ответа были логарифмические неравенства (А4) и уравнения (А8), и вопрос звучал как «Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения...».

Начиная с 2005 г., в части А1–А10 остались только неравенства (А9). Во второй части присутствуют задания, связанные с решением логарифмических уравнений или неравенств (В3). В третьей части экзаменационного варианта логарифмические уравнения и неравенства встречаются под номерами С1 и С3.

Модель КИМ 2010 г. существенно отличается от экзаменационных моделей 2001–2009 гг. по содержанию, технологии проведения и способам обработки результатов ЕГЭ. С 2010 года ЕГЭ по математике состоит из двух частей: – части В, состоящей из 12 заданий, и части С, в которую входит 6 заданий, т.е. исключена часть А (задания с выбором одного варианта ответа из нескольких вариантов). Решение логарифмических уравнений и неравенств встречается в заданиях В3 и С3.

С 2012 по 2014 гг., логарифмические уравнения и неравенства встречаются в заданиях В5 и С3.

ЕГЭ по математике в 2015 году проводилось в двух версиях – профильной и базовой. Первая предназначается для учащихся, которые поступают в технические ВУЗы и должны иметь хорошую подготовку по этому предмету. Вторую могут выбрать выпускники, которым математика не нужна для будущей учебы и работы. Оценка за базовый экзамен не может учитываться при поступлении в ВУЗ.

Базовый уровень состоит из 20 заданий, с кратким ответом, логарифмическим уравнениям посвящено задание №7.

Профильный уровень состоит из двух частей и 21 задания. Часть 1 состоит из 9 заданий базового уровня сложности. Часть 2 содержит 12 заданий повышенного и высокого уровней сложности, проверяющих уровень профильной математической подготовки. Задания 1–14 с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Задания 15–21 с развёрнутым ответом.

Для подготовки к ЕГЭ базового уровня нами разработана серия упражнений с использованием сайта «Решу ЕГЭ»:

1. Найдите корень уравнения $log_2(4-x)=7$.
2. Найдите корень уравнения $log_5(4+x)=2$.
3. Найдите корень уравнения $log_5(5-x)=log_5 3$.
4. Найдите корень уравнения $log_2(15+x)=log_2 3$.
5. Найдите корень уравнения $log_4(x+3)=log_4(4x-15)$.
6. Найдите корень уравнения $log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$.
7. Найдите корень уравнения $log_5(5-x)=2log_5 3$.
8. Решите уравнение $log_5(x^2+2x)=log_5(x^2+10)$.

9. Найдите корень уравнения $log_6(8-x) = log_6 3$.

10. Решите уравнение $log_{x-5}49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

11. Найдите корень уравнения $log_8 2^{8x-4} = 4$.

12. Найдите корень уравнения $2^{log_8(5x-3)} = 4$.

13. Найдите корень уравнения $log_{81}3^{2x-6} = 2$.

14. Найдите корень уравнения $log_6(8-x) = log_6 3$.

15. Найдите корень уравнения $log_4(2-x) = log_4 5$.

16. Решите уравнения $log_x 32 = 5$.

Нами сформулированы методические рекомендации для учителя при рассмотрении логарифмических уравнений и неравенств с параметрами из материалов ЕГЭ профильного уровня.

Анализ результатов ЕГЭ показывает, что обучающиеся испытывают определенные трудности в решении логарифмических уравнений и неравенств. Это является следствием того, что на изучение и отработку навыков по решению логарифмических уравнений и неравенств в школьном курсе математики отведено мало учебного времени.

К типичным ошибкам, допускаемым на ЕГЭ при решении логарифмических неравенств, относятся:

1. Неправильное нахождение ОДЗ неравенства.

Так как при решении неравенств, в отличие от уравнений, проверка невозможна, то нахождение ОДЗ является важным этапом решения. Например, в 2018 году «для нахождения ОДЗ требовалось решить дробно-линейное неравенство, и многие экзаменуемые с этим не справились».

2. Неправильное применение свойств логарифмов. Нередко экзаменуемые переходят от суммы/разности логарифмов к сумме/разности их аргументов.

3. Изменение ОДЗ. Экзаменуемые используют свойства логарифмов: $log_a f(x) + log_a g(x) = log_a(f(x) \cdot g(x))$ и $log_a f(x) -$

$log_a g(x) = log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ как слева направо, так и справа налево, при этом забывая, что обратное преобразование (справа налево) недопустимо, так как происходит сужение ОДЗ (может произойти потеря решений). В ходе изучения темы «Логарифмические уравнения и неравенства» нужно обязательно говорить об этом, сообщая, что для этого нужно от уравнения $log_a(f(x) \cdot g(x)) = h(x)$ переходить к совокупности двух уравнений $log_a f(x) + log_a g(x) = h(x), log_a(-f(x)) + log_a(-g(x)) = h(x).$

По аналогии: $log_a \frac{f(x)}{g(x)} = h(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} log_a f(x) - log_a g(x) = h(x), \\ log_a\big(-f(x)\big) - log_a\big(-g(x)\big) = h(x). \end{array}\right.$

Все вышеотмеченное требует от учителя на уроках, на факультативных занятиях, на дополнительных консультациях при изучении темы «Логарифмические уравнения и неравенства» обстоятельного, неформального подхода.

Были рассмотрены несколько задач, которые по нашему мнению, должны быть рассмотрены на уроках алгебры и начал анализа в 11 классе с подробным обсуждением и разбором всех «подводных камней» каждого задания, вне зависимости от того, какой экзамен по математике – профильного уровня или базового уровня – выбран обучающимся.

Заключение. Основные результаты, полученные в ходе написания бакалаврской работы.

1. На основе анализа учебно-методической и математической литературы рассмотрены определения и основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Уравнение/неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма и/или в его основании, называется логарифмическим уравнением/неравенством.

При решении логарифмических уравнений используются следующие методы: (1) Решение уравнений, основанных на определении логарифма; (2) Применение основного логарифмического тождества; (3) Решение уравнений с помощью потенцирования; (4) Введение новой переменной; (5) Логарифмирование обеих частей уравнения; (6) Переход от одного основания логарифма к другому.

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве монотонности логарифмической функции.

Изучение этой темы не только увеличивает математическую грамотность учащихся и повышает уровень их знаний при подготовке к ЕГЭ, но и развивает математическое мышление, память.

2. Логарифмические уравнения и неравенства постоянно присутствуют в экзаменационных вариантах, как на базовом, так и на профильном уровне.

Базовый уровень состоит из 20 заданий, с кратким ответом, простейшее логарифмическое уравнение – задание №7.

Экзаменационная модель ЕГЭ-2020 года (профильный уровень) состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Логарифмические уравнения включены и в первую часть – задание 5 и во вторую часть – задание 13; логарифмические неравенства – задание 15.

3. Разработанные нами методические материалы, а именно:

– серия логарифмических уравнений для подготовки к ЕГЭ базового уровня;

– методические рекомендации по изучению темы «Решение логарифмических уравнений и неравенств с параметрами» на уроках алгебры и начал анализа при подготовке к ЕГЭ профильного уровня;

нацелены на помощь учителям при подготовке обучающихся к сдаче ЕГЭ по математике по теме «Логарифмические уравнения и неравенства», а также могут быть использованы на уроках алгебры и начал анализа.

Список использованных источников состоит из 33 наименований.