МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Задачи выпускного экзамена по математике за курс средней школы

(с конца XIX века до 1986 года)

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль –
математическое образование)» механико-математического факультета

Косенковой Татьяны Игоревны

Научный руководитель
старший преподаватель ___________________________ С.В. Лебедева

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ___________________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2020

Введение. Структура и содержание итоговой аттестации всегда отражают состояние системы образования на определённом этапе её развития, поэтому экзаменационные материалы можно рассматривать как историко-педагогические математические задачи, решение которых участниками современных образовательных отношений расширяет представление об истории школьного математического образования в России.

Отдельным видам историко-педагогических математических задач посвящены диссертационные исследования: Р. А. Юхно (1969), А. П. Карпа (1998), И.А. Михайлова и С. В. Носырова (2005), Г. В. Кондратьева (2006) и др. учёных, а также научные и научно-методические публикации как этих, так и других исследователей.

Структура и содержание итоговой аттестации школьников, то есть вопрос выбора задач в качестве критериальных, не оставался без внимания психологов, учёных-математиков, педагогов-математиков (высшей и средней школы) и широкого круга общественности за всё время существования выпускного экзамена по математике за курс средней школы. Приведём далеко не полный перечень авторов, чьи публикации использовались нами при проведении исследования: В. И. Альбицкий, Е. С. Березанская, В. М. Брадис, С. С. Бронштейн, Д. С. Гончаров, А. Забулионис, С. К. Калдыбаев, А. П. Карп, Е. И. Перовский, С. Н. Шрейдер, Б. С. Эппель и др.

Объект исследования – процесс обучения математике школьников. Предмет исследования – историко-педагогические математические задачи как элемент содержания математического образования современных школьников.

Цель работы – выявить возможности использования материалов итоговой аттестации (за всё время её существования) для математического образования современных школьников.

Для достижения цели, поставлены и решены следующие задачи: (1) Определить/уточниит понятие «историко-педагогическая математическая задача». (2) Выявить роль историко-педагогических математических задач в математическом образовании современных школьников. (3) Выявить основные формы организации деятельности школьников по решению историко-педагогических математических задач.

Методы исследования: обзорно-критическое исследование (изучение историко-педагогического наследия российской системы образования), системный анализ, педагогическое моделирование, опытно-экспериментальная работа.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов основной части, заключения, списка из 52 использованных источников и приложений.

Основное содержание работы.

В первом разделе основной части работы приводятся основные положения теории критериальных историко-педагогических математических задач.

Под *математическими задачами* мы понимаем задачи, используемые для математического образования школьников.

Математические задачи, изначально разработанные для учебного процесса – *учебные математические задачи*. Как правило, такие задачи включаются в школьные учебники и задачники по математике, составляют содержание дидактических материалов. *Критериальные (контролирующие, критериально-оценочные) математические задачи* – те, которые предназначены для контроля усвоения математических знаний. Не всякая учебная задача является контролирующей, но всякая контролирующая является учебной. Математические задачи, изначально разработанные для организации досуга школьников, будем называть *занимательными*.

Учебные математические, критериальные и занимательные математические задачи прошлого – часть педагогического наследия отечественной системы образования – отнесём к *историко-педагогическим математическим задачам*. Основной структурный компонент таких задач – наличие историко-педагогического контекста, обуславливающего историко-педагогический способ решения.

Так как в своё время каждая историко-педагогическая математическая задача была учебной, контролирующей или занимательной, то возникает проблема определения принадлежности учебных, контролирующих и занимательных задач прошлого к педагогическому наследию (или современности).

К педагогическому наследию Российской системы образования мы предлагаем отнести:

во-первых, учебные математические задачи (входящие в задачные конструкции) из учебной литературы до 1968 года, из учебников по математике для средних школ реформ 1968-84 годов, из отобранных и премированных учебников, участвовавших в конкурсах на новые школьные учебнике по математике (вне зависимости от того, использовались ли в дальнейшем эти учебники в массовой школьной практике), и из экспериментальных учебников (в дальнейшем не получивших министерского грифа «разрешено»);

во-вторых, все задачи итоговой аттестации выпускников средней школы включительно до 2009 года – критериальные математические задачи;

в-третьих, занимательные задачи из детских и юношеских периодических изданий XIX и XX веков и задачи первых олимпиад школьников.

Данные выводы были сделаны на основе рассмотрения структуры и методов решения каждого класса задач с учётом историко-педагогического контекста задач итоговой аттестации. Специфические особенности задач итоговой аттестации позволили выделить эту категорию задач для дальнейшего исследования.

Задача итоговой аттестации – математическая или решаемая математическими методами практическая задача, позволяющая оценить качество математической подготовки выпускника общеобразовательной школы, определяемое целями образования в определённый исторический период. Поэтому задачи итоговой аттестации всегда следует рассматривать в историко-педагогическом контексте, учитывая цели аттестации, её форму и содержание.

С учётом цели аттестации, её формы и содержания к историко-педагогическим задачам мы отнесли задачи итоговой аттестации включительно до ЕГЭ 2009 года (в 2010 году отменены задания с выбором варианта ответа).

В рамках проводимого исследования мы выбрали все имеющиеся в периодических методических изданиях задачи итоговой аттестации за период с 1873 по 1986 гг., провели их поверхностный структурный анализ. Верхняя граница периода – 1986 год – привязана к использованию школьных учебников в образовательной практике.

С учётом историко-педагогического контекста задач итоговой аттестации были выделены 13 основных исторических *периодов*, которые мы определили по виду (экзамен за курс средней школы или за выпускной класс), количеству выпускных экзаменов по математике и числу задач в них.

Из тринадцати три периода можно считать переломными в истории итоговой аттестации учащихся средней школы и определить их как: I – период становления итоговой аттестации (1837-1871 гг.), IV – период восстановления итоговой аттестации (1918-1932 гг.), X – период установления оптимальной формы итоговой аттестации (1987-2001 гг.).

Временные промежутки между выделенными переломными периодами, мы именовали *эпохами* и дали им следующие названия: эпоха выпускных экзаменов царской России (охватывает период с 1871 по 1917 годы – II и III периоды); эпоха выпускных экзаменов в СССР (охватывает период с 1932 по 1986 годы – IV, V, VI, VII и VIII периоды); эпоха Единого государственного экзамена (охватывает период с 2002 года и по сегодняшний день – X, XI и XII периоды).

Проведён анализ критериальных задачи первых двух эпох, выявлены их специфические особенности. Подход к решению критериальных историко-педагогических математических задач рассматривается на трёх задачах первой эпохи. Предварительно, на предмет примирения к решению, были изучены подходы С. В. Носыревой (была решена историко-педагогическая задача по алгебре экзамена 1877 года, Санкт-Петербургского округа, и доказано, что разработанная С. В. Носыревой схема решения старинной (текстовой) математической задачи не подходит для решения историко-педагогических математических задач, так как не учитывает историко-педагогический контекст – основной компонент таких задач) и И. А. Михайловой, которая делает акцент не собственно на выполнении требования задачи, а на её всестороннем исследовании. Особенности выбранной нами для исследования категории задач не позволили пройти все стадии исследования, предложенные И. А. Михайловой, но в целом этапы, предложенные И. А. Михайловой, задают оптимальный подход к решению историко-педагогических математических задач, основанный на изучении структуры задачи и включающий следующие этапы решения: 1 Выявляется историко-педагогический контекст (историко-педагогическая среда, в которой существует задача, совокупность различных факторов, необходимых для понимания и объяснения выбора задачи в качестве средства обучения, средства контроля или элемента содержания математического соревнования, а также подходов и методов её решения). 2 Анализируется условие задачи в оригинальной трактовке; 3 Анализируется требование задачи в оригинальной трактовке; 4 Выявляется базис решения задачи вне историко-педагогического контекста; 5 Уточняется базис решения задачи в историко-педагогическом контексте. 6 Приводятся всевозможные способы решения задачи как в историко-педагогическом контексте, так и вне его (число способов $n \geq 2$).

Продемонстрируем сущность этого подхода на тригонометрической задаче, включённой в содержание испытаний зрелости в 1892-93 учебном году в Варшавском реальном училище: «Сумма двух сторон треугольника $a + b = 203$ футам, третья сторона $c = 145$ футам и площадь треугольника $S = 2610$ квадр. футам. Решить треугольник и сделать поверку».

Условие и первое требование задачи «решить треугольник» в оригинальной трактовке синтаксически и семантически мало отличаются от современных; изменилось только место задачи в школьном курсе математики. В конце XIX века задача относилась к курсу тригонометрии, а со второй половины XX века относится к курсу геометрии последнего года обучения в основной школе (сейчас это 9 год обучения). Второе требование задачи – «сделать поверку» является историко-педагогическим феноменом и на современном этапе развития математического образования не практикуется.

Базис выполнения первого требования задачи вне историко-педагогического контекста: применение алгебраических методов/моделей для решения геометрических задач, формулы для выражения различных элементов треугольника, формулы вычисления площади треугольника. Используя базис, решим задачу.

Формула Герона $S=\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4}$ для вычисления площади треугольника связывает все числовые данные условия задачи: $2610=\dfrac{\sqrt{(203+145)(b+145-a)(a+145-b)(203-145)}}{4}$;

$2610=\dfrac{\sqrt{174\cdot\left(145^2-(b-a)^2\right)\cdot 29}}{2}$; $\quad \dfrac{5220\cdot 6\cdot 870}{29\cdot 29}=6\cdot\left(145^2-(b-a)^2\right)$;

$180\cdot 30=145^2-(b-a)^2$; $\quad (b-a)^2=15625$; $|b-a|=125$.

И далее, возьмём для определённости $b>a$, тогда $b-a=125$, а по условию, $a+b=203$; тогда $2b=328$, $b=164$ и $a=39$.

Осталось найти углы треугольника. Для этого мы будем использовать разные формулы: $S=\dfrac{tg\,\alpha}{4}\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)$, $S=\dfrac{ac}{2}\cdot\sin\beta$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$.

В школьной практике учащиеся, исходя из личных предпочтений, как правило, используют одну из них для нахождения всех трёх углов треугольника.

Способ 1.

$S=\dfrac{tg\,\alpha}{4}\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)\qquad 2610=\dfrac{tg\,\alpha}{4}\cdot\left(164^2+145^2-39^2\right)\qquad tg\,\alpha=0{,}225$.

$S=\dfrac{tg\,\beta}{4}\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)\qquad 2610=\dfrac{tg\,\beta}{4}\cdot\left(39^2+145^2-164^2\right)\qquad tg\,\beta=-2{,}4$.

$S=\dfrac{tg\,\gamma}{4}\cdot\left(b^2+a^2-c^2\right)\qquad 2610=\dfrac{tg\,\gamma}{4}\cdot\left(164^2+39^2-145^2\right)\qquad tg\,\gamma=\dfrac{435}{308}\approx 1{,}412$.

Способ 2.

$S=\frac{bc}{2}\cdot\sin\alpha$	$2610=\frac{164\cdot145}{2}\cdot\sin\alpha$	$\sin\alpha=\frac{261}{1189}\approx0{,}220$.
$S=\frac{ac}{2}\cdot\sin\beta$	$2610=\frac{39\cdot145}{2}\cdot\sin\beta$	$\sin\beta=\frac{12}{13}\approx0{,}923$.
$S=\frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma$	$2610=\frac{39\cdot164}{2}\cdot\sin\gamma$	$\sin\gamma=\frac{1305}{1599}\approx0{,}816$.

Способ 3.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$	$39^2=164^2+145^2-2\cdot164\cdot145\cdot\cos\alpha$	$\cos\alpha=\frac{1160}{1189}\approx0{,}976$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$	$164^2=39^2+145^2-2\cdot39\cdot145\cdot\cos\beta$	$\cos\beta=\frac{-435}{1131}\approx-0{,}385$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$	$145^2=39^2+164^2-2\cdot39\cdot164\cdot\cos\gamma$	$\cos\gamma=\frac{308}{533}\approx0{,}578$.

Углы можно выразить через аркфункции, но поскольку в условии задачи геометрические величины именованы, то искать следует приближенные значения углов в градусах, используя тригонометрические таблицы логарифмов тригонометрических функций (элемент базиса в историко-педагогической контексте):

тангенс	синус	косинус
$\alpha\approx12{,}6804^\circ\approx12^\circ40'49''$	$\alpha\approx12{,}709^\circ\approx12^\circ42'32''$	$\alpha\approx12{,}578^\circ\approx12^\circ34'41''$
$\beta\approx112{,}6313^\circ\approx112^\circ37'54''$	$\beta\approx67{,}3687^\circ\approx67^\circ22'07''$	$\beta\approx112{,}644^\circ\approx112^\circ38'38''$
$\gamma\approx54{,}693^\circ\approx54^\circ41'35''$	$\gamma\approx54{,}686^\circ\approx54^\circ41'09''$	$\gamma\approx54{,}6900^\circ\approx54^\circ41'04''$.

Обращает внимание тот факт, что ученик, выбравший для вычисления угла, лежащего против большей стороны *b*, формулу $S=\frac{ac}{2}\cdot\sin\beta$, почти наверняка ошибётся. Связано это с тем, что синусы углов треугольника положительны, тангенсы и косинусы острых углов – положительны, а тупых – отрицательны.

Проведём проверку, то есть выполним второе требование экзаменационной задачи. Итак, мы нашли стороны треугольника, удостоверимся, что такой треугольник существует. Для этого используем неравенство треугольника; проверять следует большую сторону: $b < a + c$.

$164 < 39 + 134$; – это верное равенство, значит треугольник со сторонами 39, 145 и 164 футов существует.

Следующая проверка касается правильности нахождения углов и может быть геометрической и тригонометрической. Для геометрический проверки используют: (а) практические методы, связанные с построением треугольника (в нашем случае, по трём найденным сторонам) и непосредственным измерением его элементов инструментами; (б) математические методы: теорему о сумме углов треугольника (если при нахождении какого-либо угла не использовалась эта теорема или другие формулы, связывающие два или три угла треугольника):

тангенс	синус	косинус
$\alpha \approx 12{,}6804^\circ \approx 12^\circ 40' 49''$	$\alpha \approx 12{,}709^\circ \approx 12^\circ 42' 32''$	$\alpha \approx 12{,}578^\circ \approx 12^\circ 34' 41''$
$\beta \approx 112{,}6313^\circ \approx 112^\circ 37' 54''$	$\beta \approx 67{,}3687^\circ \approx 67^\circ 22' 07''$	$\beta \approx 112{,}644^\circ \approx 112^\circ 38' 38''$
$\underline{\gamma \approx 54{,}693^\circ \approx 54^\circ 41' 35''}$	$\underline{\gamma \approx 54{,}686^\circ \approx 54^\circ 41' 09''}$	$\underline{\gamma \approx 54{,}6900^\circ \approx 54^\circ 41' 04''.}$
$180{,}0047^\circ \approx 180^\circ 00' 18''$	$134{,}7637^\circ \approx 134^\circ 45' 48''$	$179{,}912^\circ \approx 179^\circ 54' 23''$

Эта проверка указывает на неверное вычисление с помощью формулы $S = \frac{ac}{2} \cdot \sin\beta$.

Теорема о соотношении сторон и углов (против большей стороны лежит больший угол) не даёт указаний на то, где искать ошибку в вычислениях (неравенству для сторон $39 < 145 < 164$ соответствует неравенство для углов $12^\circ < 54^\circ < 67^\circ$).

К геометрической проверке следует отнести и теорему синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, которая даёт следующий результат $\frac{39}{\frac{261}{1189}} = \frac{164}{\frac{12}{13}} = \frac{145}{\frac{1305}{1599}}$; $\frac{39 \cdot 1189}{261} = \frac{41 \cdot 13}{3} = \frac{29 \cdot 1599}{261}$; $\frac{46371}{261} = \frac{46371}{261} = \frac{46371}{261}$, и не позволяет найти ошибку (что, как было указано выше, вполне естественно).

Следовательно, должно применять тригонометрические способы проверки, то есть тригонометрические тождества для углов, сумма которых 180° (и здесь использование одной формулы для вычисления всех углов позволяет избежать дополнительных вычислений, поскольку значения всех тригонометрических функций уже найдены):

– тождество для тангенсов (когда ни один из углов не равен 90°) даёт следующий результат: $0{,}225 - 2{,}4 + \frac{435}{308} = -0{,}225 \cdot 2{,}4 \cdot \frac{435}{308}$, который, после преобразований, приводит нас к верному равенству $\frac{4350 - 87 \cdot 77}{3080} = -\frac{2349}{3080}$;

– тождество для косинусов $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma + 2\ cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma = 1$ предполагает проверку истинности числового равенства, в котором фигурируют дроби, составленные из многозначных чисел.

– тождество для синусов $sin\,2\alpha + sin\,2\beta + sin\,2\gamma = 4sin\,\alpha \cdot sin\,\beta \cdot sin\,\gamma$ требует вычисления синусов двойных углов через дополнительное вычисление либо косинусов, либо тангенсов, но это технически нецелесообразно, поскольку тогда лучше для проверки применять тождества для тангенсов или косинусов.

Поэтому если для нахождения углов треугольника выбирается формула, в которой фигурирует синус, то следует искать два наименьших угла (лежащих против меньших сторон), а третий вычислять, используя теорему о сумме углов треугольника. В этом случае проверкой может служить теорема синусов.

Далее следует привести разнообразные способы решения задачи.

Во втором разделе основной части работы задачи выпускных экзаменов предстают как объект изучения современными школьниками.

Экзаменационные задачи прошлых лет мы отнесли к *математическим средствам обучения* и предложили: (ф) типовые (алгоритмические) для современных школьников задачи экзаменационных работ прошлых лет, в числе прочих, можно включать в тренировочные работы непосредственно на уроках математики и в домашние работы учащихся; (б) нетиповые задачи экзаменационных работ прошлых лет – полуалгоритмические, полуэвристические, эвристические, а также историко-педагогические (рассматриваемые в этой бакалаврской работе) – могут стать основой для некоторых систематических и несистематических форм дополнительного математического образования школьников.

Историко-педагогический подход к проектированию уроков математики предусматривает, как минимум, два вида деятельности: экскурс в историю школьного образования и решение историко-педагогической математической задачи. Наиболее подходящим для включения историко-педагогических задач в содержание урока является тематическое повторение материала. На основе предложенной структуры урока был разработан сценарий урока, который приведен в статье «Универсальный сценарий урока математики для учащихся 6 класса: повторение материала по теме «Обыкновенные дроби» с экскурсом в начало XX века» в сборнике «Лобачевский и XXI век».

В бакалаврской работе был предложен далеко не полный перечень возможностей использования историко-педагогических математических задач во внеурочной работе: межпредметный проект по истории России, связанный с историей школьного математического образования; школьная математическая печать; ролевая историческая игра «Экзамен по математике на аттестат зрелости»; индивидуальные исследовательские работы по материалам периодической печати; кружковая работа; студийная работа; факультативные курсы; мастерская литературно-математического творчества; конкурсы и олимпиады школьного уровня. Основное требования к содержанию этих мероприятий – включение школьников в деятельность по поиску и/или решению историко-педагогических математических задач.

Заключение. В процессе исследования в соответствии с целью и задачами получены следующие основные выводы и результаты:

1. Определено понятие историко-педагогической математической задачи под которой отнесены учебные математические, критериальные и занимательные математические задачи прошлого – часть педагогического наследия отечественной системы образования. Задачи итоговой аттестации – математические или решаемые математическими методами практические задачи, позволяющие оценить качество математической подготовки выпускника общеобразовательной школы, определяемое целями образования в

определённый исторический период – всегда следует рассматривать в историко-педагогическом контексте.

2. Выявлена роль историко-педагогических математических задач в математическом образовании современных школьников: историко-педагогический контекст (историко-педагогическая среда, в которой существует задача, совокупность различных факторов, необходимых для понимания и объяснения выбора задачи в качестве средства обучения, средства контроля или элемента содержания математического соревнования, а также подходов и методов её решения) этих задач позволяет решающему выявить и осознать элементы прошлого, существующие в настоящем, и извлечь для себя некоторые уроки прошлого.

3. Выявлены основные формы организации деятельности школьников по решению историко-педагогических математических задач. Типовые (алгоритмические) для современных школьников задачи экзаменационных работ прошлых лет, в числе прочих, можно включать в тренировочные работы непосредственно на уроках математики и в домашние работы учащихся. Нетиповые задачи экзаменационных работ прошлых лет могут стать основой для некоторых систематических и несистематических форм дополнительного математического образования школьников: факультативных курсов, математических кружков, клубов и студий, школьной математической печати, групповых и индивидуальных проектов и т.п.