

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра системного анализа  
и автоматического управления

**АНАЛИЗ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ  
С ЗАВИСИМЫМИ СИСТЕМАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ**  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 481 группы  
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление  
факультета компьютерных наук и информационных технологий  
Астраханцева Андрея Александровича

Научный руководитель  
к. ф.-м. н., доцент \_\_\_\_\_

В.И. Долгов

Зав. кафедрой  
к. ф.-м. н., доцент \_\_\_\_\_

И.Е. Тананко

Саратов 2020

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Теория массового обслуживания — область прикладной математики, связанная с построением и исследованием математических моделей дискретных систем со стохастическим характером функционирования. Назначением этих систем является обслуживание поступающих в систему объектов, называемых требованиями. Поэтому системы этого класса называются системами обслуживания. Математические модели систем и сетей обслуживания называются системами массового обслуживания и сетями массового обслуживания соответственно.

Для многих моделей сетей массового обслуживания предполагается, что длительности обслуживания требований на различных этапах маршрута являются независимыми. Однако это неадекватно отражает реальную ситуацию в сетях передачи информации, где длина (объем) сообщения в процессе его передачи от одного узла к другому не меняется, что приводит к необходимости исследования сетей с зависимыми (в частности, идентичными) длительностями передачи сообщений на каналах. Предполагается, что наряду с длительностью обслуживания каждое требование в сети характеризуется также своим объемом, а относительно длительностей обслуживания предполагается лишь их условная (при фиксированном объеме) независимость, что позволяет фактически учитывать зависимость длительностей обслуживания одного и того же требования на различных этапах своего маршрута.

**Цель бакалаврской работы** — изучение сетей массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания и разработка программы для анализа сетей обслуживания данного типа.

В соответствии с поставленной целью определены следующие задачи:

1. Изучение сетей массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания и методов их анализа.
2. Разработка алгоритма и программы для анализа сетей массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания.

### 3. Проведение численных экспериментов с разработанной программой.

**Структура и объем работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, четырёх разделов, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Общий объем работы — 46 страницы, из них 40 страниц — основное содержание, 6 страниц приложение, список использованных источников информации — 20 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Первый раздел «Сети массового обслуживания с несколькими классами требований»** посвящён описанию смешанной сети и теоремы BCMP.

В подразделе 1.1 описана смешанная сеть массового обслуживания требований и типы систем, которые в ней используются.

Смешанная сеть массового обслуживания состоит из конечного числа  $M$  систем обслуживания, между которыми в соответствии с маршрутной матрицей  $P$  циркулирует  $R$  различных классов требований. При переходе из одной системы в другую требования могут изменять класс так, что требования  $r$ -го класса может стать требованием  $s$ -го класса ( $1 \leq r, s \leq R$ ).

Предполагается, что сеть состоит из систем следующих четырех типов.

*Система типа 1.* Обслуживание требований в системе осуществляется в соответствии с дисциплиной FCFS («первым пришел — первым обслужен»).

*Система типа 2.* Обслуживание требований в одноприборной системе осуществляется в соответствии с дисциплиной PS (разделение процессора).

*Система типа 3.* Многоприборная система с числом обслуживающих приборов, равным или большим максимального количества требований в этом системе, и дисциплиной обслуживания IS (обслуживанием без ожидания).

*Система типа 4.* Одноприборная система с дисциплиной обслуживания LCFS («последним пришел — первым обслужен»).

В подразделе 1.2 приведена теорема BCMP.

**BCMP-теорема.** Для смешанной сети массового обслуживания, каждая система которая принадлежит к одному из указанных четырех типов, стационарное распределение вероятностей состояний существует и имеет мультиплексивный вид:

$$P(n') = G^{-1} \Lambda^*(n') \prod_{i=1}^M f_i(n'_i),$$

где

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^{n_i} \prod_{j=1}^{n_i} e_j n_{ij}, & \text{если } i - \text{я система 1-го типа,} \\ n_i! \prod_{r=1}^R \prod_{l=1}^{L_{ir}} \left\{ \left[ \frac{e_{ir} A_{irl}}{\mu_{irl}} \right]^{n_{irl}} / n_{irl}! \right\}, & \text{если } i - \text{я система 2-го типа,} \\ \prod_{r=1}^R \prod_{l=1}^{L_{ir}} \left\{ \left[ \frac{e_{ir} A_{irl}}{\mu_{irl}} \right]^{n_{irl}} / n_{irl}! \right\}, & \text{если } i - \text{я система 3-го типа,} \\ \prod_{j=1}^{n_i} [e_{irj} A_{irjl}], & \text{если } i - \text{я система 4-го типа;} \end{cases}$$

$$\Lambda^*(n') = \begin{cases} \prod_{i=0}^{M(n')-1} \Lambda(i), & \text{если входящий поток 1-го типа,} \\ \prod_{j=1}^L \prod_{i=0}^{M(n', E_j)-1} \Lambda_j(i), & \text{если входящий поток 2-го типа,} \\ 1, & \text{если цепь замкнута.} \end{cases}$$

Стационарное распределение существует, если сходится ряд

$$G = \sum_n \Lambda^*(n') \prod_{i=1}^M f_i(n'_i) < \infty,$$

где  $G$  — нормализующая константа.

**Второй раздел «Сети массового обслуживания с зависимым обслуживанием»** посвящён описанию сети массового обслуживания с зависимым обслуживанием, её функционированию, а также приведена основная теорема о мультипликативности сети, в которой представлены формулы для вычисления вероятностей состояния сети.

В подразделе 2.1 рассматривается описание сети массового обслуживания с зависимым обслуживанием, для описания которой использовались следующие обозначения:

$M$  — конечное множество систем сети,

$m$  — число систем в сети массового обслуживания,

$s$  — номер системы,  $s = 1, \dots, m$ .

Системы предполагаются следующих типов:

0) экспоненциальные много приборные с бесконечной очередью и дисциплиной FIFO;

1) с бесконечным числом обслуживающих приборов;

2) одноприборные с бесконечной очередью, инверсионной дисциплиной обслуживания с прерыванием обслуживания и дообслуживанием;

3) одноприборные с бесконечной очередью и дисциплиной равномерного разделения прибора.

Множество систем типа  $i$ ,  $i = 0, \dots, 3$  обозначается  $M_i$ , а число приборов в  $i$ -й системе —  $c_i$ .

В сеть поступает пуассоновский поток требований интенсивности  $\lambda$ , а каждое поступающее требование характеризуется набором случайных величин  $(L, \mathbf{R}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ , не зависящих от аналогичных случайных величин для остальных требований и предыстории функционирования сети, где:

$L$  — случайная длина маршрута требования, т. е. число этапов, на которых оно будет обслуживаться;

$\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_L)$  — случайный маршрут, представляющий собой набор номеров систем (возможно повторяющихся), последовательно проходимых требованием на всех  $L$  этапах;

$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_L)$  — случайные объемы на последовательно проходимых этапах маршрута, вообще говоря, различные на различных этапах;

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_L)$  — случайные длительности обслуживания на последовательно проходимых этапах маршрута, также, вообще говоря, различные на различных этапах.

В подразделе 2.2 описываются частные случаи для сети массового обслуживания с зависимым обслуживанием.

В подразделе 2.3 определён марковский процесс, описывающий функционирование введенной сети массового обслуживания.

В подразделе 2.4 приведена основная теорема о мультипликативности сети.

**Теорема.** Если для узлов  $s$  типа 0  $\rho_s < c_s$ , для узлов  $s$  типа 1  $\rho_s < \infty$ , и для узлов  $s$  типов 2 и 3  $\rho_s < 1$ , то существует предельное (стационарное) распределение вероятностей состояний процесса  $\mathbf{Z}(t)$  с плотностью распределения вероятностей

$$p(z) = \prod_{s=1}^m p_s(z_s),$$

где:

для систем  $s$  типа 0

$$p_s(z_s) = p_s(0) \left( \frac{\lambda}{\mu_s} \right)^{k_s} \prod_{i=1}^{k_s} g(l_{si}, r_{si}, y_{si}) \times \begin{cases} 1/k_s! & \text{при } k_s \leq c_s, \\ 1/(c_s! c_s^{k_s - c_s}) & \text{при } k_s > c_s; \end{cases}$$

и

$$p_s(0) = \left[ \sum_{i=0}^{c_s} \frac{1}{i!} \left( \frac{\lambda}{\mu_s} \right)^i + \frac{\lambda}{c_s! (c_s \mu_s - \lambda)} \left( \frac{\lambda}{\mu_s} \right)^{c_s} \right]^{-1};$$

для систем  $s$  типа 1

$$p_s(z_s) = e^{-\rho_s} \frac{\lambda^{k_s}}{k_s!} \prod_{i=1}^{k_s} \bar{B}_{n_{si}}(x_{si} | l_{si}, r_{si}, y_{si}) g(l_{si}, r_{si}, y_{si});$$

для систем  $s$  типа 2 или 3

$$p_s(z_s) = (1 - \rho_s) \lambda^{k_s} \prod_{i=1}^{k_s} \bar{B}_{n_{si}}(x_{si} | l_{si}, r_{si}, y_{si}) g(l_{si}, r_{si}, y_{si}).$$

В подразделе 2.5 приводятся некоторые следствия и частные случаи для основной теоремы о мультипликативности сети.

**Третий раздел «Анализ сети массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания»** посвящён описанию алгоритма анализа сети.

В подразделе 3.1 приведена Блок-схема алгоритма анализа сети массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания.

В подразделе 3.2 посвящён описанию блоков алгоритма анализа сети массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания.

Алгоритм состоит из 6 блоков.

В первом блоке производится обработка входных данных.

Во втором блоке вычисляется нагрузка системы.

В третьем блоке происходит проверка условия существования стационарного распределения вероятностей.

В четвёртом блоке вычисляются стационарные вероятности состояния систем.

В пятом блоке вычисляются стационарные вероятности состояния сети.

В шестом блоке выводятся результаты.

**Четвертый раздел «Описание программы для анализа сети массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания»** посвящен описанию программы для анализа сети массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания.

В подразделе 4.1 описываются назначения и структура программы. Программа предназначена для вычисления стационарных вероятностей состояния сети. Программа написана на языке «C#». В качестве интерфейса в данной программе мы используем форму. С её помощью происходит связь пользователя с программой.

В подразделе 4.2 описывается интерфейс и правила использования программы.

В подразделе 4.3 приводится пример использования программы для анализа сети массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Широкое применение сетей массового обслуживания различных классов в качестве математических моделей дискретных систем с сетевой структурой и стохастическим характером функционирования обуславливает дальнейшее интенсивное развитие теории сетей массового обслуживания, методов решения задач их анализа, оптимизации и синтеза, а так же методологии моделирования дискретных систем сетями массового обслуживания.

В выпускной квалификационной работе рассмотрены сети массового обслуживания с несколькими классами требований, и приведена теорема BCMP. Представлено описание сети массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания, рассмотрен марковский процесс, описывающий функционирование сети, и приведена основная теорема о мультипликативности сети. Кроме того, были разработаны алгоритм и программа для анализа сети массового обслуживания с зависимыми системами обслуживания. Программа написана на языке программирования C#. Описана структура программы и инструкция для работы с ней.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания . Учебное пособие для студентов университетов — Саратов : Научная книга, 2004.—175с.
2. Вишневский В.М. Принципы построения системы автоматизации проектирования сетей ЭВМ — М.,1982.— С. 24-30
3. Башарин, Г. П. Теория сетей массового обслуживания и её приложения к анализу информационно-вычислительных систем. — М., 1983. — С. 3-119.
4. Бочаров, П.П. Теория массового обслуживания. — М., 1995. —С. 529.
5. Вишневский, В.М., Теоретические основы построения компьютерных сетей. — М. :Техносфера 2003. — С. 512 .
6. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ.— М.: Радио и связь, 1988.— С. 192 .
7. Печенкин А.В., Рыков В.В. О декомпозиции замкнутых сетей с зависимым обслуживанием.— М., 1999.— №11.— С.58-69.
8. Вишневский В.М. Теория построения сетей передачи данных распределённых вычислительных систем массового обслуживания. — М.: МИ-ЭМ. 1986. — С.51-53
9. Назаров, А.А. Теория массового обслуживания. — Томск: Издательство Научно-технической литературы. 2004. — 229с.
10. Саати, Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. — М.:Издательство «Советское радио», 1965. — 505 с.
11. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания./Ивницкий В.А. — М.:физматлит, 2004 — 772с.
12. Самусевич Г.А. Основы теории обслуживания: учебное пособие. — Екатеринбург:УГТУ-УПИ, 2009 — 102с.

13. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания/Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. — М.: Наука, 2017 — 432 с.
14. Карташевский, В.Г. Основы теории массового обслуживания. — М.: Радио и связь, 2016 — 108 с.
15. Касаткин, А. И. Профессиональное программирование на языке си. Управление ресурсами. — М.: Высшая школа, 1992. — 432 с.
16. Бишоп, Дж. С# в кратком изложении / Дж. Бишоп, Н. Хорспул. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. — 472 с.
17. Баринов, В.В. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации. Учебник. — М.: Курс, 2017. — 863 с.
18. Подбельский, В. В. Язык С#. Базовый курс. — М.: Финансы и статистика, 2013. — 408 с.
19. Карташевский, В.Г. Основы теории массового обслуживания. — М.: Радио и связь, 2016. — 108 с.
20. Мартин, Дж. Системный анализ передачи данных. — М.: Мир, 1975. — 680 с