МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Гамильтоновость и запрещенные подграфы

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Кошелевой Алины Владимировны

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов
23.01.2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов
23.01.2020 г.

Саратов 2020

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире теория графов имеет высокую значимость. Она находит применение в различных областях нашей жизни, например в геоинформационных системах (2ГИС, Яндекс.Карты), где все дороги могут быть рассмотрены как ребра, а перекрестки – как вершины. Теория графов в данном случае позволяет проложить кратчайший путь до какого-либо объекта или спланировать оптимальный маршрут.

Большое значение имеет теория графов в криптографии. Например, известная схема доказательства о нулевом разглашении гамильтонова цикла. Кроме того, множество диагностических систем представимы в виде графов, что позволяет осуществлять техническую диагностику методами теории графов.

В данной работе будут рассмотрены основные достаточные условия гамильтоновости графов, связанные с запрещенными подграфами. Так как не существует эффективного алгоритма для определения гамильтоновости графов, но существуют достаточные условия гамильтоновости, целью данной работы будет выявление более эффективных условий, позволяющих определить гамильтоновость графов. Будут рассмотрены неориентированные графы с количеством вершин до 11.

Дипломная работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка использованных источников и 2 приложений. Общий объем работы – 50 страниц, из них 27 страниц – основное содержание, которое включает 20 рисунков и список использованных источников из 17 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1 Основные определения

В данном разделе приводятся основные определения из теории графов, взятых из источников [1], [2], [3].

2 Гамильтоновы графы

Гамильтонов граф – граф, в котором есть гамильтонов цикл.

Гамильтонов путь – простой путь в графе, содержащий все вершины графа ровно по одному разу.

Гамильтонов цикл – простой цикл в графе, содержащий все вершины графа ровно по одному разу [1].

Гамильтоновы путь, цикл и граф названы в честь ирландского математика У. Гамильтона, который впервые определил эти понятия, исследовав задачу «кругосветного путешествия» по додекаэдру[4].

В таблице 1 приведено общее количество простых неориентированных графов с заданным числом вершин n, связных, двусвязных и гамильтоновых[5]. Эти данные согласованы с известными (последовательности A000088, A001349, A002218 и A003216[6] и [7]).

Таблица 1 – Количество связных, двусвязных и гамильтоновых графов

Число вершин	**Всего**	**Связные графы**	**Двусвязные графы**	**Гамильтоновы графы**
3	4	3	1	1
4	11	6	3	3
5	34	21	10	8
6	156	112	56	48
7	1044	853	468	383
8	12346	11117	7123	6196
9	274668	261080	194066	177083
10	12005168	11716571	9743542	9305118
11	1018997864	1006700565	900969091	883156024

Неизвестен эффективный алгоритм решения задачи проверки гамильтоновости графа, так как она является NP-полной, но существуют достаточные условия гамильтоновости, которые рассмотрим ниже.

3 Достаточные условия гамильтоновости и запрещенные подграфы

Граф G называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 такие, что концы любого ребра графа G принадлежат разным подмножествам.

Граф порядка n называется *панциклическим*, если он содержит циклы всех длин от 3 до n.

Если граф G содержит все возможные рёбра, соединяющие вершины V_1 и V_2, то G называется *полным двудольным* графом и обозначается $K_{m,n}$, где m и n – число вершин в V_1 и V_2.

На рисунке 1 изображены графы $K_{1,3}$ и Z_2. Граф Z_2 получается из графа $K_{1,3}$ добавлением одного ребра[5]. Этот и последующие рисунки сделаны с помощью редактора graphonline.ru[8].

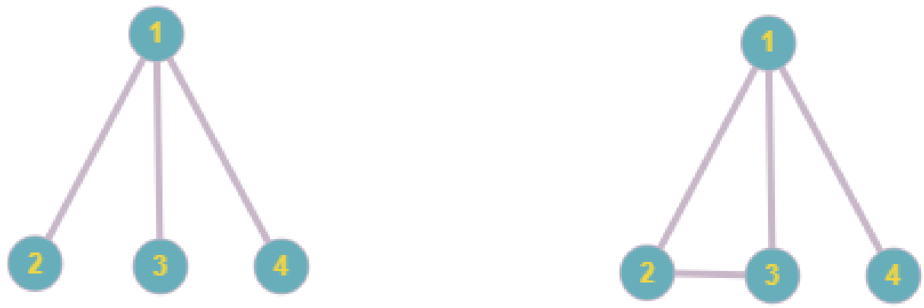

Рисунок 1 – Графы $K_{1,3}$ и Z_2

Теорема 3.1 (Гудман-Хедетниеми, 1976 [9])

Если двусвязный граф G не содержит подграфов вида $K_{1,3}$ и Z_2, то граф G – гамильтонов.

В работе [10] отмечается, что число графов, удовлетворяющих условию Гудмана-Хедетниеми, не очень велико.

Теорема 3.2 (Оберли-Самнер, 1979 [11])

Связный, локально связный граф G порядка $n \geq 3$, не содержащий подграфа вида $K_{1,3}$, является гамильтоновым.

Теорема 3.3 (Дуффус-Голд-Джекобсон, 1981 [12])

Если двусвязный граф G порядка $n \geq 3$ не содержит подграфов вида $K_{1,3}$ и F, то граф G – гамильтонов.

Теорема 3.4 (Голд-Джекобсон, 1982 [13])

Если двусвязный граф G не содержит подграфов вида $K_{1,3}$ и Z_2, тогда граф G либо панциклический или граф G является циклом.

Следствие 3.5 (Голд-Джекобсон, 1982 [13])

Пусть двусвязный граф G не содержит подграфа вида $K_{1,3}$:

(1) Если граф G не содержит подграфа вида l, тогда G – гамильтонов

(2) Если граф G не содержит подграфа вида A, тогда G – гамильтонов

Теорема 3.6 (Броерсма-Вельдман, 1987 [14])

Пусть двусвязный граф G не содержит подграфа вида $K_{1,3}$.

(1) Если каждый подграф Z_1 из G удовлетворяет $f(a, b_1)$ или $f(a, b_2)$, тогда граф G либо панциклический или G является цикл.

(2) Если каждый подграф Z_2 из G удовлетворяет $f(a_1, b_1)$ или $f(a_1, b_2)$, тогда граф G либо панциклический или G является цикл.

Теорема 3.7 (Броерсма-Вельдман, 1987 [14])

Пусть двусвязный граф G не содержит подграфа вида $K_{1,3}$. Если каждый подграф из G изоморфен графу P_7 или P_7^+ удовлетворяющих условию $f(a, b_1)$ или $f(a, b_2)$, или ($f(a, c_1)$ и $f(a, c_2)$), тогда G – гамильтонов.

4 Достаточные условия гамильтоновости и степени вершин

Введем обозначения:

$deg(u)$ – степень вершины в графе u.

$d(u, v)$ – минимальное расстояние между вершинами u и v.

$N(u)$ – множество вершин смежных с вершиной u.

Теорема 4.1 (Дирак, 1952 [15])

Пусть G – граф порядка $n \geq 3$. Если выполняется, что степень любой вершины $deg(v) \geq n/2$, то G – гамильтонов.

Теорема 4.2 (Оре, 1960 [16])

Пусть G – граф порядка $n \geq 3$. Если для любых двух несмежных вершин u и v выполняется неравенство $deg(u) + deg(v) \geq n$, то G – гамильтонов.

Теорема 4.3 (Хватал, 1972 [17])

Пусть G – граф с вектором степеней $(d_1, \dots, d_n)$ и $n \geq 3$. Если для любого k верна импликация $\left(d_k \leq k < \frac{n}{2}\right) \to (d_{n-k} \geq n - k)$, то граф G гамильтонов.

Теорема 4.4 (Бонди-Хватал, 1976 [17]): Граф гамильтонов тогда и только тогда, когда его замыкание является гамильтоновым графом.

Обычно Теорема Бонди-Хватала используется в форме следующего достаточного условия гамильтоновости.

Теорема 4.5 (**Бонди-Хватал, 1976 [17]**): Если замыкание $[G]$ графа G является полным графом, то G – гамильтонов.

5 Практическая часть

5.1 Используемые программные средства

Запускаем Cygwin и переходим в директорию nauty26r11.

Для генерации всевозможных графов с заданным количеством вершин используется генератор «geng» из пакета nauty & traces, разработанного Бреданом МакКеем [18].

Генерация выполнялась на машине с процессором Intel(R) Pentium(R) CPU N3540 2.16 GHz.

5.2 Описание программы

Задачей данной работы является программная реализация всех вышеописанных достаточных условий гамильтоновости, а также сравнение их эффективности.

На начальном этапе были созданы файлы всех графов с числом вершин от 3 до 11, при помощи программного комплекса nauty.

5.3 Результаты работы программы

В таблицах ниже приведены результаты, полученные для теорем 1-7 и достаточных условий Оре, Дирака, Хватала, Бонди-Хватала.

Таблица 2 – полученные результаты

Кол-во вершин	Гамильтоновы графы	Теорема 3.1	Теорема 3.2	Теорема 3.3	Теорема 3.4	Следствие 3.5	Теорема 3.6
N=3	1	1	1	1	1	1	0
N=4	3	3	2	3	3	3	0
N=5	8	4	5	8	8	8	4
N=6	48	5	18	32	25	29	23
N=7	383	5	69	126	56	95	94
N=8	6196	6	349	605	133	397	436
N=9	177083	6	2049	3148	331	1887	2241
N=10	9305118	7	14610	19296	945	12179	14526
N=11	883156024	7	102270	115776	2835	85253	99792

Таблица 3 – полученные результаты

Кол-во вершин	Гамильтоновы графы	Теорема 3.7	Дирак	Оре	Хватал	Бонди-Хватал
N=3	1	0	1	1	1	1
N=4	3	0	3	3	3	3
N=5	8	0	3	5	6	7
N=6	48	0	19	21	34	45
N=7	383	0	29	68	194	352
N=8	6196	0	424	503	2733	5540
N=9	177083	39	1165	4942	54435	157016
N=10	9305118	671	108376	128361	2914167	8298805
N=11	883156024	10065	868311	5315783	218674224	802944311

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены основные понятия теории графов, связанные с гамильтоновыми графами.

В ходе работы была написана программа на языке *Java* в среде *IntelliJ IDEA*, в которой были реализованы основные достаточные условия гамильтоновости, сформулированные в терминах запрещенных подграфов, и достаточные условия типа Дирака, Оре, Хватала и Бонди-Хватала.

Был проведен вычислительный эксперимент для всех графов с числом вершин от 3 до 11, который показал, что наиболее эффективным является достаточное условие Бонди-Хватала, но есть гамильтоновы графы, которые не подходят под условие Бонди-Хватала, но подходят под условия некоторых теорем, сформулированных в терминах запрещенных подграфов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. М.: Мир. – 1973. – 296 с.

2 Абросимов, М.Б. Практические задания по графам / М.Б. Абросимов, А.А, Долгов. – 2-е издание: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2009. 76 с.

3 Карпов, Д. В. Теория графов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. В. Карпов // Санкт-Петербургский государственный университет. – СПб. : 2017. – 525 с. – URL: https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf (дата обращения: 17.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

4 Гамильтонов граф [Электронный ресурс]: Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гамильтонов_граф (дата обращения: 10.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

5 Абросимов, М.Б. О достаточном условии Гудмана-Хедетниеми гамильтоновости графа [Электронный ресурс]: Изв. Сарат. ун-та / Нов. сер. / Сер. Математика / Механика / Информатика / 2018. – Т. – 18. – вып. 3.

6 The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]: N.J.A. Sloane, editor: URL: http://oeis.org (дата обращения 21.09.2019). – Загл. с экрана. – Яз. англ.

7 Абросимов, М. Б. Сравнение достаточных условий гамильтоновости графа, основанных на степенях вершин [Электронный ресурс] : научная статья / М. Б. Абросимов // Прикладная дискретная математика, 2019. – № 45. – С. 55–63. – URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=pdm&paperid=671&option_lang=rus (дата обращения: 14.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

8 GraphOnline: Работа с графами онлайн [Электронный ресурс] / URL: https://graphonline.ru/ (дата обращения: 10.10.2019). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

9 Goodman, S.E. Sufficient Conditions for a graph to be Hamiltonian / S.E. Goodman, S.T. Hedetniemi // J. Combin. Theory B. – 1974 – № 16. – P. 175–180.

10 Gould, R. J. Advances on the Hamiltonian Problem – A Survey // J. Graph Theory. – 1991. – Vol. – 15. – iss. – 2. – P. – 121–157. – DOI: https://doi.org/10.1002/jgt.3190150204
11 Oberly, D.J. Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is Hamiltonian / D.J. Oberly, D.P. Sumner // J. Graph Theory 3. –1979. – P. – 351–356.
12 Duffus, D.A. Forbidden Subgraphs and the Hamiltonian Theme / D.A. Duffus, R.J. Gould, M.S. Jacobson // Theory and App. of Graphs. (Kal. Mich, 1982), Wiley, N. Y. – 1981. – 297–316.
13 Gould, R.J. Forbidden Subgraphs and Hamltonian properties in graphs / R.J. Gould, M.S. Jacobson // Discrete Math. –1982. – no. – 2–3. – 189–196.
14 Broersma, H.J. Restrictions on induced subgraphs ensuring hamiltonicity or pancyclicity of K1 , 3 −free graphs / H.J. Broersma, H.J. Veldman. – 1987.
15 Dirac, G.A. Some theorems on abstract graphs / G.A. Dirac // Proc. London Math. Soc. – 1952. – P. – 69–81.
16 Ore, O. Note on Hamilton circuits / O. Ore // Amer. Math. Monthly. – 67. – 1960. – P. – 55–56.
17 Bondy, J.A. A method in graph theory / J.A. Bondy, V. Chvatal // Discrete Mathematics. – 1976. – P. –111–135.
18 Faudree, R.J. Neighborhood unions and hamiltonian properties in graphs / R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, R.H. Schelp // J. Combinat. Theory. B. – 47. – 1989. – P. – 1–9.